Vejledende besvarelse på august 2009-sættet

2. december 2009

Det følgende er en vejledende besvarelse på eksamenssættet i kurset Calculus, som det så ud i august 2009. Den tjener primært til illustration af, hvordan man bør formulere en besvarelse skriftligt. Modsat hvad der typisk er tilfældet i matematik, er der ikke en entydig måde at gøre dette på, men hvis der var, ville det være den her. Der tages forbehold for alle former for fejl. Rettelser og kommentarer kan smides på `fuglede@imf.au.dk`.

Opgave 1. *Lad f betegne funktionen $f(x,y) = x^2 \cos y$.*

1. *Beregn de partielle afledede f_x, f_y, og angiv gradienten ∇f.*
2. *Beregn den retningsafledede $D_u f(2,1)$ i retningen givet ved enhedsvektoren $u = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)$.*
3. *Bestem en enhedsvektor v så den retningsafledede $D_v f(2,1) = 0$.*

Løsning. 1) Ved direkte udregning fås, at de partielle afledede er givet ved

$$f_x(x,y) = 2x \cos y, \quad f_y(x,y) = -x^2 \sin y.$$

Det betyder, at ∇f er givet ved

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x \cos y, -x^2 \sin y).$$

2) Da de partielle afledede er kontinuerte, er funktionen f differentiabel if. [S] stn. 11.4.8 og ifølge [S] stn. 11.6.8 er den ønskede retningsafledede givet ved

$$\begin{aligned} D_u f(2,1) &= f_x(2,1)\tfrac{3}{\sqrt{13}} + f_y(x,y)\tfrac{2}{\sqrt{13}} \\ &= 4\cos(1)\tfrac{3}{\sqrt{13}} - 4\sin(1)\tfrac{2}{\sqrt{13}} \\ &= \tfrac{4}{\sqrt{13}}(3\cos(1) - 2\sin(1)). \end{aligned}$$

3) Idet vi skriver $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ er det if. formel 11.6.6 nok at finde θ, så

$$f_x(2,1)\cos\theta + f_y(2,1)\sin\theta = 0. \tag{1}$$

Med andre ord skal gælde, at

$$0 = 4\cos(1)\cos\theta - 4\sin(1)\sin\theta,$$

men dette er ækvivalent til, at

$$\sin(1)\sin\theta = \cos(1)\cos(\theta).$$

Idet $\cos\theta = 0$ ikke giver anledning til en løsning af (1), får vi – idet vi husker, at $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ – at ovenstående ligning er det samme som

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\tan(1)}.$$

Ligningen (1) har altså to løsninger $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, hvor θ er givet ved $\theta = \arctan\left(\frac{1}{\tan(1)}\right)$. ∎

Opgave 2. *Betragt* 3×3*-matricen* A *givet ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Beregn det karakteristiske polynomium for* A *og angiv egenværdierne.*
2. *Bestem egenrummet hørende til egenværdien* 0 *for matricen* A.

Løsning. 1) Pr. definition er det karakteristiske polynomium for A givet ved $\det(A - \lambda I)$, der, idet vi udvikler efter anden søjle, er givet ved

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda((1-\lambda)(1-\lambda) - 1) = -\lambda(1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1) \\ &= -(\lambda - 0)(\lambda - 0)(\lambda - 2),\end{aligned}$$

og vi kan aflæse, at egenværdierne for A er 0 og 2.
2) Pr. definition er egenrummet givet ved $N(A - 0I) = N(A)$, og rækkereduktion giver, at

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har altså to frie parametre, og egenrummet bliver

$$N(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

Opgave 3. *Lad* D *betegne området i planen begrænset af linjerne* $x = 0$, $x = 4$ *samt af graferne for funktionerne* $y = x^2$ *og* $y = -x$.

1. *Tegn området og beskriv det i koordinater som et type I-område.*
2. *Udregn dobbeltintegralet*

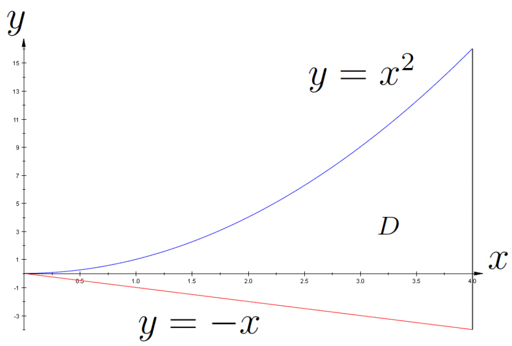
$$\iint_D xy \, dA.$$

Løsning. 1) Området D fremgår af fig. 1 og kan som type I-område beskrives som

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, -x \leq y \leq x^2\}.$$

2) Funktionen f givet ved $f(x,y) = xy$ er kontinuert på D, og if. [S] stn. 12.3.3 fås da, at

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dA &= \int_0^4 \int_{-x}^{x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^4 [\tfrac{1}{2}xy^2]_{y=-x}^{y=x^2}\,dy\,dx \\
&= \int_0^4 \tfrac{1}{2}x(x^4 - x^2))\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^4 x^5 - x^3\,dx = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{4}x^4]_{x=0}^{x=4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4096}{6} - 64\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2048}{3} - \frac{192}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{1856}{3} = \frac{928}{3}.
\end{aligned}
$$



Figur 1: Området D, der optræder i opgave 3.

∎

Opgave 4. *Betragt følgende vektorer i* $\mathbb{R}^3$*:*

$$u = (0,1,1), \quad x = (1,3,2).$$

1. *Beregn afstanden mellem vektorerne x og u.*
2. *Beregn den ortogonale projektion v af vektoren x på underrummet $U = span(u)$.*
3. *Beregn den korteste afstand fra x til U.*

Løsning. 1) Afstanden mellem de to vektorer er givet ved

$$\|x - u\| = \|(1,2,1)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

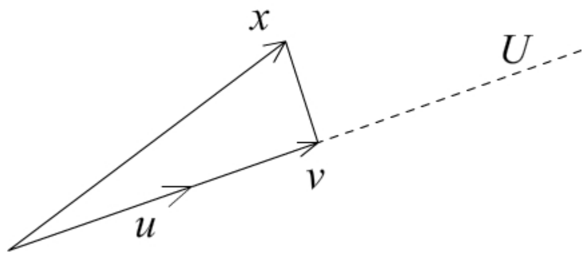
2) Projektionen af x på U er blot projektionen af x på u, som er givet ved

$$v = \frac{x \cdot u}{u \cdot u}u = \frac{0+3+2}{0+1+1}(0,1,1) = \tfrac{5}{2}(0,1,1).$$

3) Som det fremgår af fig. 2, er den korteste afstand fra x til U præcis længden af vektoren $x - v$ (eller altså afstanden fra x til v), der er givet ved

$$\|x - v\| = \|(1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\| = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}.$$

∎



Figur 2: Skitse til opg. 4.3.

Opgave 5. *Betragt funktionen f givet ved*

$$f(x, y) = 6 - 3x - 3y + x^2 + xy + y^2.$$

1. *Bestem det kritiske punkt (a, b) for funktionen f og beregn den kritiske værdi $f(a, b)$.*

2. *Bestem arten af det kritiske punkt (a, b) ved brug af andenordenskriteriet.*

Løsning. 1) Det kritiske punkt (a, b) skal opfylde, at $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. De partielle afledede er givet ved

$$f_x(x, y) = -3 + 2x + y, \quad f_y(x, y) = -3 + x + 2y.$$

Vi får derfor, at $0 = -3 + 2a + b$ og $0 = -3 + a + 2b$, der har den entydige løsning $a = 1$, $b = 1$, som det ses ved indsættelse. Den kritiske værdi er

$$f(a, b) = f(1, 1) = 6 - 3 - 3 + 1 + 1 + 1 = 3.$$

2) Vi betragter [S] stn. 11.7.2 og finder de dobbelt partielt afledede, der her er givet ved

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{yy}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = 1.$$

Idet disse alle er kontinuerte i nærheden af $(1, 1)$, og idet vi i sætningens notation har $D = D(a, b) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$ og ydermere, at $f_{xx}(a, b) > 0$, får vi, at den kritiske værdi er et lokalt minimum. ■

Opgave 6. *Lad f være funktionen givet ved*

$$f(x) = \sin(x^2).$$

1. *Angiv Maclaurinrækken for funktionen f.*

2. *Lad F betegne den stamfunktionen til f, der opfylder $F(0) = 1$. Angiv en potensrække i x, der fremstiller F.*

Løsning. 1) Idet Maclaurinrækken for $\sin x$ er givet ved

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

er Maclaurinrækken for $\sin(x^2)$ blot givet ved

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

2) Vi kan finde stamfunktionen F ved blot at integrere ledvist i Maclaurinrækken. Vi finder da, at

$$\begin{aligned} F(x) = \int \sin(x^2)\,dx &= C + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{5!7} + \frac{x^{11}}{7!11} - \cdots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}, \end{aligned}$$

og da $F(0) = C$, må der gælde, at $C = 1$ i ovenstående udtryk. ■

Opgave 7. *Betragt differentialligningssystemet*

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Det oplyses, at -3 og 1 er egenværdier for systemets koefficientsmatrix A.

1. *Bestem egenvektorerne for koefficientmatricen.*
2. *Angiv løsningerne til differentialligningssystemet.*
3. *Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesværdibetingelsen*

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Løsning. 1) Vi finder egenvektoren hørende til egenværdien $\lambda_1 = -3$ ved at rækkereducere $A - 3I$ og får, at

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvilket viser, at $x_1 = (-1, 1)$ er en egenvektor hørende til $\lambda = -3$. Vi observerer, at dette er rigtigt, idet

$$A(-1,1) = (3,-3) = -3(-1,1).$$

For egenværdien $\lambda_2 = 1$ ser vi, at

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og i dette tilfælde bliver $x_2 = (1, 1)$ en egenvektor.
2) Vi ved, at den generelle løsning er på formen

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{-3t} + c_2 e^t \end{pmatrix},$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter.
3) Ovenstående udregning viser, at

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Det ses ud fra disse ligninger, at konstanterne nødvendigvis bliver $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, og den ønskede løsning bliver

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Som et tjek ser vi, at $y_1'(t) = e^t = -e^t + 2e^t = -y_1(t) + 2y_2(t)$, og tilsvarende er $y_2'(t) = 2y_1(t) - y_2(t)$. ■