Noter til Lineær algebra-TØ uge 9

4. marts 2010

Opgave 4.2.20. *Lad V og W være to vektorrum med ordnede baser E hhv. F, lad $L : V \to W$ være en lineær transformation og lad A være matricen, der repræsenterer L relativt til baserne E og F. Vis at $v \in \ker(L)$, hvis og kun hvis $[v]_E \in N(A)$, og at $w \in L(V)$, hvis og kun hvis $[w]_F$ tilhører søjlerummet af A.*

Bevis. Lad os først vise, at $v \in \ker(L)$, hvis og kun hvis $[v]_E \in N(A)$. Antag derfor først, at $v \in \ker(L)$. Da følger af definitionen på matrixrepræsentationen A (se Stn. 4.2.2), at

$$A[v]_E = [L(v)]_F = [0]_F = 0,$$

hvilket netop betyder, at $[v]_E$ tilhører $N(A)$.
Antag omvendt, at $[v]_E \in N(A)$ og lad os vise, at $L(v) = 0$. Som ovenfor fås, at $[L(v)]_F = A[v]_E = 0$. Hvis basen for W er givet ved $F = [w_1, \ldots, w_m]$ og $L(v)$ i denne basis er givet ved

$$L(v) = a_1w_1 + \cdots + a_mw_m,$$

ved vi fra det ovenstående, at

$$0 = [L(v)]_F = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

så $L(v) = 0w_1 + \cdots + 0w_m = 0$, og $v \in \ker(L)$. Mere generelt gælder som ovenfor, at $[w]_F = 0$ medfører, at $w = 0$ for alle $w \in W$. Dette sidste faktum kan ses som et resultat af, at afbildningen $W \to \mathbb{R}^m$ givet ved $w \mapsto [w]_F$ er injektiv (husk opgave 4.1.21!) Se også bemærkningen efter opgaven her.
Lad os nu vise, at $w \in L(V)$, hvis og kun hvis $[w]_F$ tilhører søjlerummet af A. Antag først at $w \in L(V)$. Det vil sige, at $w = L(v)$ for et $v \in V$. Som ovenfor gælder nu, at $[w]_F = [L(v)]_F = A[v]_E$, som tilhører søjlerummet af A pr. den lidet overraskende Sætning 3.6.2: Søjlerummet af A består netop af alle vektorer på formen Ax, for hvis søjlerne i A hedder $a_1, \ldots, a_n$ gælder $Ax = x_1a_1 + \cdots x_na_n$; en linearkombination af søjlerne i A og dermed pr. definition et element i søjlerummet.
Antag nu omvendt at $[w]_F$ tilhører søjlerummet af A. Sæt som ovenfor $F = [w_1, \ldots, w_m]$ og sæt nu $E = [v_1, \ldots, v_n]$. Skriv $w = x_1w_1 + \ldots x_mw_m$ for passende skalarer $x_1, \ldots, x_m$. Pr. antagelse vil vektoren $[w]_E = (x_1, \ldots, x_m)^T$ tilhøre søjlerummet af A. Pr. Sætning 3.6.2 kan vi nu finde et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ så $Ay = x$. Påstanden er nu, at $v = y_1v_1 + \ldots y_nv_n$ opfylder, at $L(v) = w$, hvilket er det, vi er på jagt efter. Dette er imidlertid præcis definitionen på matricen A; se diskussionen på side 187 forud for Sætning 4.2.2. □

Bemærkning. Første halvdel af opgaven her giver præcis den korrespondance mellem en lineær afbildnings kerne og den tilhørende matrixrepræsentations nulrum, som vi diskuterede til TØ i dag; anden halvdel giver sammenhængen mellem en lineær afbildnings billede og den tilhørende matrixrepræsentations rækkerum. Beviset forstås bedst i termer af det såkaldte *kommutative* diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "G"'] & W \arrow[d, "H"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Her er afbildningerne G og H givet ved $G(v) = [v]_E$ og $H(w) = [w]_F$. Betragt for eksempel sidste fjerdedel af beviset, hvor vi givet $w \in W$ vil finde $v \in V$, så $L(v) = w$. Løsningen bliver at betragte $x = H(w) = [w]_F \in \mathbb{R}^m$ og at udnytte, at vi kan løse ligningssystemet $Ay = x$, hvor $y = \mathbb{R}^n$. Vi bevæger os nu igen op i diagrammet og finder $v \in V$, så $y = G(v) = [v]_E$ (med andre ord er $v = G^{-1}(y) = G^{-1}(A^{-1}(H(w)))$ – mere om det senere). Alt i alt sikrer konstruktionen os, at vi præcis får $L(v) = w$.
Diagrammet kaldes kommutativt, fordi $H \circ L = A \circ G$: Starter man øverst til venstre og går ned til højre, er det ligegyldigt, hvilken af de to retninger i diagrammet, man vælger.
Bemærk endelig at opgaven viser følgende to ligheder, som jeg talte om til TØ:

$$G(\ker(V)) = N(A)$$
$$H(L(V)) = A(\mathbb{R}^n) = \text{Sø}(A).$$

Vi har således fået en sammenhæng mellem teorien for løsning af lineære ligningssystemer i termer af matricer, som beskrevet i kap. 3 i [L], og mere generelle grundlæggende begreber om lineære afbildninger, som beskrevet i kap. 4 i [L].

Opgave B. *Vi skal vise at en afbildning $f : X \to Y$ er invertibel, hvis og kun hvis den er både injektiv og surjektiv (dvs. bijektiv). De respektive definitioner er givet på ugesedlen.*

Bevis. Antag først at f er invertibel; at der findes et afbildning $g : Y \to X$, så $g(f(x)) = x$ for alle $x \in X$, og $f(g(y)) = y$ for alle $y \in Y$. Lad os først vise, at f er injektiv. Hvis $f(x_1) = f(x_2)$, får vi $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, så f er injektiv. Givet et $y \in Y$, sæt $z = g(y)$. Så er $f(z) = f(g(y)) = y$, så f er surjektiv.
Antag nu, at f er både injektiv og surjektiv. Dertil konstrueres afbildningen $g : Y \to X$ som følger: For hvert $y \in Y$ findes præcis ét $x \in X$ så $f(x) = y$. Definer $g(y) = x$. Herved fås for alle $y \in Y$, at $f(g(y)) = y$. På samme måde fås for alle $x \in X$, at x er det eneste element i mængden $f^{-1}(\{f(x)\})$, så $g(f(x)) = x$. □