En topologisk kvantecomputer

Eller: Ikke bare endnu et foredrag om Jonespolynomiet

Søren Fuglede Jørgensen

Foredrag for studerende

11. oktober, 2013

Plan

Plan:

1. Kvantecomputere generelt, kvantebits og kvantekredsløb.
2. Fletningsgrupper og kvanterepræsentationer. En kvantecomputer fra Jonespolynomiet.
3. Implementering.

Kvantecomputere; definitioner

Definition

En *kvantebit* (en: qubit) er en (enheds)vektor i $\mathbb{C}^2$. En *samling af n-kvantebits* er en (enheds)vektor i $\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$.

Notation: $\mathbb{C}^2 = \mathrm{span}(|0\rangle, |1\rangle)$ og $|v\rangle \otimes |w\rangle = |v\rangle|w\rangle = |vw\rangle$.

Definition

Et *kvantespjæld* (en: quantum logic gate) er en $2^n \times 2^n$-unitær matrix $g \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{U}(2^n)$.

Definition

Et *kvantekredsløb med n kvantebits over en samling spjæld $\mathcal{S}$* (en: quantum circuit) er en afbildning $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} \to (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ sammensat af endeligt mange matricer $\mathrm{id} \otimes g \otimes \mathrm{id}$, hvor $g \in \mathcal{S}$. *Måling* af en samling kvantebits giver normkvadratet på et frit valg koefficient i standardbasen.

Universalitet

Definition

En samling spjæld $\mathcal{S}$ kaldes universel, hvis samlingen af kredsløb med n kvantebits over $\mathcal{S}$ er tæt i $\mathrm{U}(2^n)$ for hvert n.

Eksempel: Definer Hadamardmatricen H, $\pi/8$-spjældene $\sigma_z^{\pm 1/4}$ og kontrolleret-ikke CNOT ved

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z^{\pm 1/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm \pi i/4} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er $\mathcal{S} = \{H, \sigma_z^{\pm 1/4}, \mathrm{CNOT}\}$ universel.

Eksempel: Deutsch-Jozsa-algoritmen

Problem

Lad $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ være en funktion, der enten er konstant eller tager værdien 0 på præcis halvdelen af definitionsområdet. Bestem om f er konstant.

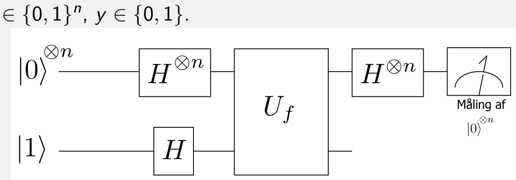
Klassisk løsning.

Evaluer mindst halvdelen, dvs. $2^{n-1} + 1$, af de mulige værdier af f. □

Udførselstiden af denne algoritme vokser eksponentielt i n. En kvantecomputer kan løse problemet med én evaluering!

Eksempel: Deutsch-Jozsa-algoritmen

Lad U_f være den unitære afbildning $|x\rangle|y\rangle \mapsto |x\rangle|[f(x) + y]_2\rangle$ for $x \in \{0,1\}^n$, $y \in \{0,1\}$.



De første tre skridt afbilder (øvelse)

$$|0\rangle^{\otimes n}|1\rangle \mapsto \sum_{x,z \in \{0,1\}^n} \frac{(-1)^{x \cdot z + f(x)}|z\rangle}{2^n} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right).$$

Hvordan implementerer man fletninger?

Lad $|\psi_1\psi_2\rangle$ være bølgefunktionen for to identiske partikler. I dimension 3 gælder, at

$$|\psi_1\psi_2\rangle = \begin{cases} |\psi_2\psi_1\rangle & \text{hvis } \textit{bosoner} \\ -|\psi_2\psi_1\rangle & \text{hvis } \textit{fermioner} \end{cases}$$

I dimension 2 kan der til gengæld gælde

$$|\psi_1\psi_2\rangle = e^{2\pi i\theta}|\psi_2\psi_1\rangle$$

At (kvasi)partikler med denne egenskab (og $\theta \in \mathbb{Q}$) findes blev opdaget i 80'erne og afstedkom en Nobelpris i 1998 med opdagelsen af *rational kvante-Hall-effekt*. Partiklerne kaldes *aloner* (en: anyons).

Aloner og fletningsgrupper

$$|\psi_i\psi_{i+1}\rangle = e^{2\pi i\theta}|\psi_{i+1}\psi_i\rangle.$$

Dette definerer en *abelsk* repræsentation $\rho : B_n \to \mathrm{U}(1)$ ved

$$\rho(\sigma_i) = [e^{2\pi i\theta}].$$

Dette er præcis ρ_n^n.

Åbent spørgsmål

Eksisterer ikke-abelske aloner, der realiserer de generelle ikke-abelske fletningsgrupperepræsentationer $\rho_d^n : B_n \to U(V_d^n)$?