Stone–von Neumanns sætning

The Stone–von Neumann theorem

Bachelorprojekt i matematik

Søren Fuglede Jørgensen – 20050938

10. august, 2008

Vejleder: Bent Ørsted

Institut for Matematiske Fag
Det Naturvidenskabelige Fakultet, Aarhus Universitet

Indhold

Abstract

The history of modern quantum mechanics began in the first half of the last century and arose from experimental inconsistencies with and the inadequacy of classical mechanics. During the 1920's the world saw two, originally rivaling, mathematical descriptions of quantum mechanics: The matrix mechanics created by Werner Heisenberg, Max Born and Pascual Jordan, and the wave mechanics created by Erwin Schrödinger. Schrödinger himself implied the connection between the two descriptions, and Heisenberg stated the equivalence of these two pictures as the fundamental problem of quantum mechanics in his *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. The investigation of this equivalence gave and does still give rise to research in the area. In chapter 2 we will see how the Stone–von Neumann theorem contributes to this investigation.

We will consider the canonical commutation relations $[Q, P] = QP - PQ = i\hbar I$, where P and Q are operators on a Hilbert space; the fundamental object of quantum mechanics, which was first used by Hilbert himself and afterwards by von Neumann. Schrödinger found the well known $L^2(\mathbb{R})$ representation of the relations, where Q is the multiplication operator $Q\psi(x) = x\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, and P is the differential operator $P\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$, where $\hbar$ is the reduced Planck constant. In chapter 2 we will see how this representation is basically unique. This result is essentially the Stone–von Neumann theorem, which is the main focus of this bachelor's assignment. The theorem is formulated as an equivalence result of representation theory; we will see that every unitary representation of the Heisenberg group on a given Hilbert space is unitarily equivalent to the Schrödinger representation (or, more precisely, that the Hilbert space is a direct sum of mutually orthogonal subspaces, and that the given representation is equivalent to the Schrödinger representation, when restricted to these subspaces). This fact is presented in chapter 1 in such a way that it can be read and understood without prior knowledge to the physical problem that led to its interest. Conversely, if the physical problem is the interest of the reader, it is possible to skip the mathematics and go directly to chapter 2 without the lack of mathematics being too big an obstacle. As much of quantum mechanics require some insight into the theory of unbounded operators, I have included a short appendix on these, concerning the most basic notions and definitions that will be used in the assignment.

Forord

Den moderne kvantemekaniks historie begynder i første halvdel af det sidste århundrede og var et resultat af en række eksperimentelle uoverensstemmelser med og utilstrækkeligheder i den klassiske mekanik. I løbet af 1920'erne opstod de første to, oprindeligt konkurrerende, matematiske formuleringer af kvantemekanikken: Werner Heisenbergs, Max Borns og Pascual Jordans matrixmekanik fra 1925 på den ene side, og på den anden side Erwin Schrödingers bølgemekanik fra 1926, der byggede på de Broglies bølge-partikel-dualitet. Schrödinger selv antydede sammenhængen mellem de to umiddelbart efter offentliggørelsen af sin bølgemekanik, og Heisenberg udtalte selv i sin *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, at ligheden mellem hans eget partikelbillede og Schrödingers bølgebillede udgjorde det centrale problem i kvantemekanikken. Undersøgelsen af "ækvivalensen" af de to teorier gav således, og giver sågar endnu, anledning til forskning på området. I kapitel 2 ser vi, hvordan Stone–von Neumanns sætning, som den fremstilles i det følgende, sammen med det forudgående arbejde af Hermann Weyl, var et kraftigt bidrag til ækvivalensspørgsmålet.

Mere konkret betragter vi de kanoniske kommutatorrelationer $[Q, P] = QP - PQ = i\hbar I$, hvor P og Q er operatorer på et Hilbertrum. Hilbertrummet er netop kvantemekanikkens centrale ramme, der først så lyset i en afhandling af Hilbert selv, og som blev undersøgt videre af von Neumann. Schrödinger fandt den velkendt repræsentation på $L^2(\mathbb{R})$ heraf, hvor Q er multiplikationsoperatoren $Q\psi(x) = x\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ og P er differentialoperatoren $P\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$, hvor $\hbar$ er Plancks (reducerede) konstant. Vi vil i kapitel 2 indse, at denne repræsentation (under visse betingelser) er den eneste repræsentation af relationerne, op til unitær transformation. Dette resultat er i en vis forstand indholdet af Stone–von Neumanns sætning; denne opgaves hovedfokus. Sætningen er her fremstillet som et repræsentationsteoretisk entydighedsresultat, idet vi ser, at enhver unitær repræsentation af Heisenberggruppen på et givet Hilbertrum er unitært ækvivalent med Schrödingerrepræsentationen (eller mere præcist, at Hilbertrummet er en direkte sum af indbyrdes ortogonale underrum, og at repræsentationen på hvert af disse underrum er unitært ækvivalent med Schrödingerrepræsentationen). Dette faktum er fremstillet i kapitel 1 og det er gjort på en sådan måde, at det kan læses uden kendskab til det bagvedliggende fysiske incitament. Er man omvendt udelukkende interesseret i det fysiske resultat er det muligt at springe direkte til kapitel 2 uden de store problemer.

Opgaven er skrevet i forbindelse med kurset videregående analyse (med de omfangsmæssige begrænsninger der følger heraf) og forudsætter i nogen grad kendskab til den teori for begrænsede operatorer på Hilbertrum, som blev udviklet heri. Som det vil fremgå af beskrivelsen af sætningens betydning i kvantemekanikken, er det imidlertid svært at undgå arbejdet med ubegrænsede operatorer og de problemer der følger med; for fuldstændighedens skyld er nogle af disse behandlet i en (meget) kort introduktion til operatorteorien i app. A. Derudover forudsættes kendskab til flere af bacheloruddannelsens kurser, og hvorimens det ikke burde være nødvendigt, vil en grundlæggende introduktion til kvantemekanikken muligvis være en fordel for forståelsen af fysikken i denne opgave; kapitel 2 indeholder imidlertid også en gennemgang af nogle af de matematiske modeller for kvantemekanikken. Hvor det er særligt relevant, vil der være konkrete henvisninger hertil.

Udlægningen af de repræsentationsteoretiske begreber, Stone–von Neumanns sætning og beviset for sætningen stammer fra [1] med særlig fokus på at lade denne opgave blive en selvindeholdt fremstilling af sætningen, og hvor det har været nødvendigt, er [6] blevet inddraget. Beskrivelsen af sætningens vigtighed i kvantemekanikken stammer fra [3]. De historiske bemærkninger i dette forord og i opgavens hovedtekst stammer fra [4] og [5].

Lad mig desuden udnytte denne lejlighed til at takke Bent Ørsted for effektivt at kunne svare på de spørgsmål, jeg har haft i forbindelse med tilblivelsen af denne opgave, og lad mig takke Klaus Thomsen for et inspirerende kursus i videregående analyse.

Århus, august 2008 Søren Fuglede Jørgensen

1 Stone–von Neumanns sætning

Stone–von Neumanns sætning er et resultat i repræsentationsteorien og til formuleringen behøves derfor en række begreber herfra. Bemærk at "operator" i det følgende, som i [1], vil betegne en lineær afbildning mellem to vektorrum og ikke nødvendigvis fra et vektorrum til sig selv; der skelnes således ikke, som i nogen litteratur, mellem begreberne "operator" og "transformation".

1.1 Notation og definitioner

Definition 1.1 (Unitær repræsentation)**.** Lad G være en topologisk gruppe (dvs. en gruppe, hvor afbildningerne $G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh$ og $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ er kontinuerte), lad $\mathcal{H}$ være et Hilbertrum og lad $U(\mathcal{H})$ betegne mængden af unitære operatorer på $\mathcal{H}$. En *unitær repræsentation af G på $\mathcal{H}$* er en homomorfi $\pi : G \to U(\mathcal{H})$, der er stærkt kontinuert; dvs. $g \mapsto \pi(g)x$ er kontinuert for alle $x \in \mathcal{H}$.

Definition 1.2 (Sammenflettende operator og unitær ækvivalens)**.** Lad G være en topologisk gruppe og lad π_1 og π_2 være unitære repræsentationer af G på to Hilbertrum $\mathcal{H}_1$ hhv. $\mathcal{H}_2$. En *sammenflettende operator* mellem π_1 og π_2 er en begrænset operator $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, så $\pi_2(g)T = T\pi_1(g)$ for alle $g \in G$. Mængden af sammenflettende operatorer mellem π_1 og π_2 betegnes $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$. Indeholder $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ en unitær operator siges π_1 og π_2 at være *unitært ækvivalente*.

Definition 1.3 (Irreducibel unitær repræsentation)**.** En unitær repræsentation π af G på $\mathcal{H}$ kaldes *irreducibel*, hvis følgende betingelse er opfyldt: Hvis $L \subseteq \mathcal{H}$ er et lukket underrum af $\mathcal{H}$, så $\pi(g)v \in L$ for alle $g \in G$ og $v \in L$, så er $L = \{0\}$ eller $L = \mathcal{H}$. Med andre ord er de eneste lukkede underrum, der er invariante under alle $\pi(g)$, hele $\mathcal{H}$ og $\{0\}$.

Definition 1.4 (Heisenberggruppen)**.** Ved for $p, p', q, q' \in \mathbb{R}^n$ og $t, t' \in \mathbb{R}$ at definere operationen

$$(p,q,t)(p',q',t') = (p + p', q + q', t + t' + \tfrac{1}{2}(pq' - qp'))$$

gøres $\mathbb{R}^{2n+1}$ til en gruppe, der kaldes *Heisenberggruppen* og betegnes $\mathbf{H}_n$.

Definition 1.5 (Schrödingerrepræsentationen)**.** Lad $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ved *Schrödingerrepræsentationen* forstås da afbildningen $\rho_h : \mathbf{H}_n \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ givet ved

$$\rho_h(p,q,t)f(x) = e^{2\pi iht + 2\pi iqx + \pi ihpq} f(x + hp). \tag{1.1}$$

Proposition 1.6. *Schrödingerrepræsentationen er en irreducibel unitær repræsentation.*

Bevis. Det følger direkte af definitionen, at $\rho_h(p,q,t)$ er en homomorfi, og at $\rho_h(p,q,t)^* = \rho_h(-p,-q,-t)$, så $\rho_h(p,q,t)$ er unitær. At den er stærkt kontinuert følger af, at translation er det. Lad, for at se det, $a \in \mathbb{R}^n$. Først vises, at afbildningen $a \mapsto \langle \tau_a f, g\rangle$ er kontinuert for $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, hvor τ_a her betegner translation med a. Lad (a_k) være en følge i $\mathbb{R}^n$ så $a_k \to a$. Ved Lebesgues sætning om domineret konvergens vil gælde

$$\langle \tau_{a_k} f, g\rangle = \int f(x + a_k)\overline{g(x)}\, dx \to \langle \tau_a f, g\rangle,$$

idet funktionen $x \mapsto f(x+a_k)\overline{g(x)}$ er domineret af $x \mapsto \|f\|_\infty \overline{g(x)}$, der er integrabel, da g har kompakt støtte. Lad nu $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ og $\varepsilon > 0$. Da $C_c(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $L^2(\mathbb{R}^n)$ findes funktioner $f', g' \in C_c(\mathbb{R}^n)$, så $\|f-f'\|_2 < \min(\frac{\varepsilon}{9\|g\|_2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{9}})$ og $\|g-g'\|_2 < \min(\frac{\varepsilon}{9\|f\|_2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{9}})$. Betragt som før en følge $a_k \to a$ og sæt $\Delta f = f' - f$ og $\Delta g = g' - g$. For et givet k gælder nu, at

$$\begin{aligned}
|\langle \tau_{a_k} f, g\rangle - \langle \tau_{a_k} f', g'\rangle| &= |\langle \tau_{a_k} f, g\rangle - \langle \tau_{a_k} f + \tau_{a_k}\Delta f, g + \Delta g\rangle| \\
&= |-(\langle \tau_{a_k} f, \Delta g\rangle + \langle \tau_{a_k}\Delta f, g\rangle + \langle \tau_{a_k}\Delta f, \Delta g\rangle)| \\
&\leq \|\tau_{a_k} f\|_2 \|\Delta g\|_2 + \|\tau_{a_k}\Delta f\|_2 \|g\|_2 + \|\tau_{a_k}\Delta f\|_2 \|\Delta g\|_2 \\
&< \tfrac{\varepsilon}{9} + \tfrac{\varepsilon}{9} + \tfrac{\varepsilon}{9} = \tfrac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

idet det er brugt, at τ_a er en isometri. På helt samme måde fås for grænsepunktet a, at

$$|\langle \tau_a f, g\rangle - \langle \tau_a f', g'\rangle| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Fra første del af beviset følger, at der findes et N, så

$$|\langle \tau_a f', g'\rangle - \langle \tau_{a_k} f', g'\rangle| < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

når $k > N$. For $k > N$ gælder da også, at

$$\begin{aligned}
&|\langle \tau_a f, g\rangle - \langle \tau_{a_k} f, g\rangle| \\
&\quad \leq |\langle \tau_a f, g\rangle - \langle \tau_a f', g'\rangle| + |\langle \tau_a f', g'\rangle - \langle \tau_{a_k} f', g'\rangle| + |\langle \tau_{a_k} f, g\rangle - \langle \tau_{a_k} f', g'\rangle| \\
&\quad < \varepsilon,
\end{aligned}$$

hvilket viser, at $a \mapsto \langle \tau_a f, g\rangle$, og dermed også $a \mapsto \langle f, \tau_a g\rangle$, er kontinuerte afbildninger. At $a \mapsto \tau_a f$ er det, følger nu let: Vi har, at

$$\begin{aligned}
\|\tau_{a_k} f - \tau_a f\|^2 &= \langle \tau_{a_k} f - \tau_a f, \tau_{a_k} f - \tau_a f\rangle \\
&= \langle f, f\rangle + \langle f, f\rangle - \langle \tau_{a_k} f, \tau_a f\rangle - \langle \tau_a f, \tau_{a_k} f\rangle \\
&\to \langle f, f\rangle + \langle f, f\rangle - \langle f, f\rangle - \langle f, f\rangle = 0
\end{aligned}$$

for $k \to \infty$, så translation, og dermed Schrödingerrepræsentationen, er stærkt kontinuert.

Tilbage står derfor kun irreducibiliteten; antag for simpelhedens skyld herefter, at $h = 1$ (tilfældet $h \neq 1$ kan klares analogt). For at vise irreducibiliteten indføres for $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ afbildningen $V(f,g) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\begin{aligned}
V(f,g)(p,q) = \langle \rho_1(p,q,0) f, g\rangle &= \int e^{2\pi i q x + \pi i p q} f(x+p)\overline{g(x)}\, dx \\
&= \int e^{2\pi i q y} f(y + \tfrac{1}{2}p)\overline{g(y - \tfrac{1}{2}p)}\, dy.
\end{aligned}$$

Af Cauchy–Schwarz følger, at $V(f,g)$ er begrænset med $\|V(f,g)\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Desuden betragtes for $F \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ afbildningen $\tilde{V}(F) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\tilde{V}(F)(p,q) = \int e^{2\pi i q y} F(y + \tfrac{1}{2}p, y - \tfrac{1}{2}p)\, dy.$$

For $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ er da $V(f,g) = \tilde{V}(f \otimes \overline{g})$, hvor $f \otimes \overline{g}(x,y) = f(x)\overline{g}(y)$. Lad os nu se, at $\tilde{V}$ er unitær. For $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ er

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(y,p)|^2\, dy\, dp < \infty,$$

og ifølge Fubinis sætning er også $\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(y,p)|^2 \, dy < \infty$ for næsten alle p. Vi kan derfor betragte Fouriertransformationen i første variabel

$$\hat{\Phi}_2(q,p) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i q y} \Phi(y,p) \, dy.$$

Inversionsformlen siger i dette tilfælde, at

$$\Phi(y,p) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i q y} \hat{\Phi}_2(q,p) \, dq.$$

Denne partielle Fouriertransformation er desuden unitær, da den almindelige Fouriertransformation er det: For hvert p er

$$\int |\Phi(y,p)|^2 \, dy = \int |\hat{\Phi}_2(q,p)|^2 \, dq,$$

og integration med hensyn til p giver netop, at $\|\Phi\| = \|\hat{\Phi}_2\|$. Også koordinattransformationen $\Lambda : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ givet ved $\Lambda\Phi(y,p) = \Phi(y + \frac{1}{2}p, y - \frac{1}{2}p)$ ses at være unitær: Jacobianten af transformationen er -1 og ifølge transformationssætningen er da $\|\Lambda\Phi\| = \|\Phi\|$. Bemærk nu, at $\tilde{V}$ netop er sammensætningen af invers Fouriertransformation i første variabel og ovenstående koordinattransformation. Det følger heraf, at $\tilde{V}$ er unitær, og dermed for alle $f_1, g_1, f_2, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, at

$$\begin{aligned}
\langle V(f_1,g_1), V(f_2,g_2)\rangle &= \langle \tilde{V}(f_1 \otimes \overline{g_1}), \tilde{V}(f_2 \otimes \overline{g_2})\rangle = \langle f_1 \otimes \overline{g_1}, f_2 \otimes \overline{g_2}\rangle \\
&= \iint f_1(x)\overline{g_1(y) f_2(x)} g_2(y) \, dx \, dy \\
&= \int f_1(x)\overline{f_2(x)} \, dx \int \overline{g_1(y)} g_2(y) \, dy \\
&= \langle f_1, f_2\rangle \overline{\langle g_1, g_2\rangle}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Det er nu let at vise irreducibiliteten af ρ_1. Lad $\mathcal{M}$ være et ikketrivielt underrum af $L^2(\mathbb{R}^n)$, der er invariant under ρ_1 og lad $f \in \mathcal{M}$ med $f \neq 0$. Hvis $g \perp \mathcal{M}$ er $g \perp \rho_1(p,q,0)f$ for alle $p, q \in \mathbb{R}^n$, da $\mathcal{M}$ er invariant under ρ_1, og det følger, at $V(f,g) = 0$. Ovenstående udregning giver da, at

$$0 = \|V(f,g)\|_2^2 = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2,$$

og da $f \neq 0$ må gælde $g = 0$, og vi har $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{R}^n)$, hvilket afslutter beviset.

□

Definition 1.7 (Twistet foldning)**.** Lad $F, G \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Ved den twistede foldning af F og G forstås afbildningen $F \natural G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\begin{aligned}
F \natural G(p,q) &= \iint F(p',q') G(p-p', q-q') e^{\pi i (p'q - q'p)} \, dp' \, dq' \\
&= \iint F(p-p', q-q') G(p',q') e^{\pi i (pq' - qp')} \, dp' \, dq'.
\end{aligned}$$

Som det gælder for den almindelige foldning, er $F \natural G \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

Definition 1.8 (Direkte summer af Hilbertrum)**.** Lad $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in I}$ være en familie af Hilbertrum. Da defineres den direkte sum af Hilbertrummene, betegnet $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha$ (eller blot $\bigoplus \mathcal{H}_\alpha$), som mængden af elementer $v = (v_i)_{i \in I}$ i det kartesiske produkt af alle $\mathcal{H}_\alpha$ så $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$. Bemærk at kun tælleligt mange v_i er forskellige fra 0. Vektoraddition og skalarmultiplikation defineres ledvist og det indre produkt af $u, v \in \bigoplus \mathcal{H}_\alpha$ er givet ved

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i\in I} \langle u_i, v_i\rangle.$$

Denne definition bemærkes at gøre $\bigoplus \mathcal{H}_\alpha$ til et Hilbertrum. I det følgende identificeres det kartesiske produkt af indbyrdes ortogonale underrum af et givet Hilbertrum som et nyt underrum af Hilbertrummet, og den direkte sum defineres som ovenfor.

1.2 Repræsentationer af Heisenberggruppen

Med disse begreber på plads er det muligt at fremsætte og bevise Marshall Stones og John von Neumanns sætning fra 1930–1931, der udsiger, at enhver repræsentation af Heisenberggruppen er unitært ækvivalent med Schrödingerrepræsentationen under enkelte betingelser:

Sætning 1.9 (Stone–von Neumann). *Lad π være en unitær repræsentation af $\mathbf{H}_n$ på et Hilbertrum $\mathcal{H}$, så $\pi(0,0,t) = e^{2\pi iht} I$ for et $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Da er $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_\alpha$, hvor $\mathcal{H}_\alpha$ er indbyrdes ortogonale underrum af $\mathcal{H}$, der alle er invariante under π, og $\pi_{|\mathcal{H}_\alpha}$ er unitært ækvivalente med ρ_h for alle α. Specielt er π ækvivalent med ρ_h, hvis π er irreducibel.*

Bevis. For overskuelighedens skyld antages, at $h = 1$; beviset er analogt for $h \neq 1$. Før vi for alvor går i gang med beviset, introduceres en række nye afbildninger. Vi vil derefter søge at nå frem til den i definitionen krævede sammenflettende operator. I stedet for ρ_1 skrives herefter blot ρ og, ved et mindre notationsmisbrug, indføres desuden $\rho : \mathbb{R}^{2n} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ givet ved $\rho(a, b) = \rho(a, b, 0)$. Da ρ er en unitær repræsentation gælder nu, at $\rho^*(p, q) = \rho(-p, -q)$, og

$$\rho(p, q)\rho(r, s) = \rho(p + r, q + s, \tfrac{1}{2}(ps - qr)) = e^{\pi i(ps-qr)}\rho(p + r, q + s). \tag{1.3}$$

I et yderligere notationsmisbrug defineres den lineære afbildning $\rho : L^1(\mathbb{R}^{2n}) \to B(L^2(\mathbb{R}^n))$ ved

$$\rho(F) = \iint F(p, q)\rho(p, q)\, dp\, dq,$$

hvor integralet forstås svagt: For alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ er

$$\langle\rho(F)f, g\rangle = \iint F(p, q)\langle\rho(p, q)f, g\rangle\, dp\, dq.$$

At en sådan operator findes følger af Riesz–Frechet på følgende måde: For hvert $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ defineres $l_f : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ved

$$l_f(g) = \iint F(p, q)\langle\rho(p, q)f, g\rangle\, dp\, dq.$$

Da er l_f lineær, og pr. Cauchy–Schwarz er

$$|l_f(g)| \leq \iint |F(p, q)||\langle\rho(p, q)f, g\rangle|\, dp\, dq \leq \|F\|_1\|f\|_2\|g\|_2,$$

så $l_f \in (L^2(\mathbb{R}^n))^*$. Ifølge Riesz–Frechet findes da en vektor $\rho(F)f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, så $l_f(g) = \langle\rho(F)f, g\rangle$ for alle $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ og $\|\rho(F)f\|_2 = \|l_f\|$. Det følger, at $\rho(F)$ er en lineær operator, og af ovenstående ulighed, at $\|\rho(F)\| \leq \|F\|_1$. Det observeres nu, at $\rho(F)$

tillige opfører sig pænt med hensyn til den twistede foldning: Lad $F, G \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ og $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Da er

$$
\begin{aligned}
\langle \rho(F \natural G) f, g \rangle &= \iint (F \natural G)(p,q) \langle \rho(p,q) f, g \rangle \, dp \, dq \\
&= \iint \left(\iint F(p-p', q-q') G(p', q') e^{\pi i (pq' - qp')} \, dp' \, dq' \right) \langle \rho(p,q) f, g \rangle \, dp \, dq \\
&= \iint \iint F(p,q) G(p',q') e^{\pi i ((p+p')q' - (q+q')p')} \langle \rho(p+p', q+q') f, g \rangle \, dp \, dq \, dp' \, dq' \\
&= \iint \iint F(p,q) G(p',q') \langle \rho(p,q) \rho(p',q') f, g \rangle \, dp \, dq \, dp' \, dq' \\
&= \iint G(p',q') \iint F(p,q) \langle \rho(p,q) \rho(p',q') f, g \rangle \, dp \, dq \, dp' \, dq' \\
&= \iint G(p',q') \langle \rho(F) \rho(p',q') f, g \rangle \, dp' \, dq' \\
&= \iint G(p',q') \langle \rho(p',q') f, \rho(F)^* g \rangle \, dp' \, dq' \\
&= \langle \rho(G) f, \rho(F)^* g \rangle = \langle \rho(F) \rho(G) f, g \rangle,
\end{aligned}
$$

idet (1.3) er brugt ved fjerde lighedstegn. Det ses altså, at $\rho(F \natural G) = \rho(F)\rho(G)$. Lad nu $a, b \in \mathbb{R}^n$ og $F \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Da gælder

$$
\begin{aligned}
\langle \rho(a,b) \rho(F) f, g \rangle &= \langle \rho(F) f, \rho(-a,-b) g \rangle \\
&= \iint F(p,q) \langle \rho(p,q) f, \rho(-a,-b) g \rangle \, dp \, dq \\
&= \iint F(p,q) \langle \rho(a,b) \rho(p,q) f, g \rangle \, dp \, dq \\
&= \iint F(p,q) e^{\pi i (aq - pb)} \langle \rho(a+p, b+q) f, g \rangle \, dp \, dq \\
&= \iint F(p-a, q-b) e^{\pi i (a(q-b) - (p-a)b)} \langle \rho(p,q) f, g \rangle \, dp \, dq \\
&= \iint F(p-a, q-b) e^{\pi i (aq - pb)} \langle \rho(p,q) f, g \rangle \, dp \, dq
\end{aligned}
$$

eller altså

$$
\rho(a,b)\rho(F) = \rho(G), \quad \text{hvor } G(p,q) = e^{\pi i (aq - bp)} F(p-a, q-b). \tag{1.4}
$$

På helt samme måde kan det sluttes, at

$$
\rho(F)\rho(a,b) = \rho(H), \quad \text{hvor } H(p,q) = e^{\pi i (bp - aq)} F(p-a, q-b).
$$

Der gælder desuden, at ρ er tro: Lad $F \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, så $\rho(F) = 0$. Da giver ovenstående, at vi for alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ og $a, b \in \mathbb{R}^n$ har, at

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \rho(a,b) \rho(F(p,q)) \rho(-a,-b) f, g \rangle \\
&= \langle \rho(a,b) \rho(e^{\pi i (aq - bp)} F(p+a, q+b)) f, g \rangle \\
&= \langle \rho(e^{2\pi i (aq - bp)} F(p,q)) f, g \rangle \\
&= \iint e^{2\pi i (aq - bp)} F(p,q) \langle \rho(p,q) f, g \rangle \, dp \, dq.
\end{aligned}
$$

Ifølge Fouriers inversionsformel er nu $F(p,q)\langle \rho(p,q) f, g \rangle = 0$ næsten overalt, og der må gælde $F = 0$ næsten overalt, hvilket viser, at ρ er tro.

Som i beviset for Proposition 1.6 defineres $V(f,g) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ ved

$$\begin{aligned} V(f,g)(p,q) = \langle \rho(p,q)f, g\rangle &= \int e^{2\pi iqx+\pi ipq} f(x+p)\overline{g(x)}\,dx \\ &= \int e^{2\pi iqy} f(y+\tfrac{1}{2}p)\overline{g(y-\tfrac{1}{2}p)}\,dy, \end{aligned}$$

når $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Det centrale i beviset bliver at finde de elementer i $\mathcal{H}$, der svarer til afbildningen $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$, således at vi kan definere vores ønskede sammenflettende operator på dissew. Af denne grund defineres for $a, b \in \mathbb{R}^n$ følgende fire afbildninger:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 2^{n/4}e^{-\pi x^2}, &\quad \varphi^{ab}(x) = \rho(a,b)\varphi(x) = 2^{n/4}e^{2\pi ibx+\pi iab}e^{-\pi(x+a)^2}, \\ \Phi = V(\varphi,\varphi), &\quad \Phi^{ab} = V(\varphi,\varphi^{ab}). \end{aligned}$$

Næste del af beviset består nu i snedig manipulation med disse størrelser. Bemærk først, at

$$\begin{aligned} \Phi(p,q) &= \int e^{2\pi iqy}\varphi(y+\tfrac{1}{2}p)\overline{\varphi(y-\tfrac{1}{2}p)}\,dy \\ &= 2^{n/2}\int e^{2\pi iqy}e^{-\pi(y+\frac{1}{2}p)^2}e^{-\pi(y-\frac{1}{2}p)^2}\,dy \\ &= 2^{n/2}\int e^{2\pi iqy}e^{-\pi(y^2+\frac{1}{4}p^2+yp+y^2+\frac{1}{4}p^2-yp)}\,dy \\ &= 2^{n/2}e^{-\frac{1}{2}\pi p^2}\int e^{\sqrt{2}\pi iqy}e^{-\pi y^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dy \\ &= e^{-\frac{1}{2}\pi p^2}\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{2}\pi iq_jy_j}e^{-\pi y_j^2}\,dy_j, \end{aligned}$$

hvor integrationen i sidste lighed er omskrevet ved Fubinis sætning, idet $q = (q_1,\dots,q_n)$ og $y = (y_1,\dots,y_n)$. Fra kompleks funktionsteori huskes nu, at $\int e^{-\pi x^2+i\alpha x+c}\,dx = e^c e^{\alpha^2/(4\pi)}$ for $\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Derved er

$$\int e^{\sqrt{2}\pi iq_jy_j}e^{-\pi y_j^2}\,dy_j = e^{-\frac{2\pi^2q_j^2}{4\pi}} = e^{-\frac{1}{2}\pi q_j^2},$$

og ved indsættelse i ovenstående fås

$$\Phi(p,q) = e^{-\frac{1}{2}\pi(p^2+q^2)}.$$

Det følger nu af (1.3), og af ovenstående udregning af Φ, at

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{pq}, \varphi^{ab}\rangle &= \Phi^{ab}(p,q) = \langle \rho(p,q)\varphi, \rho(a,b)\varphi\rangle \\ &= \langle \rho(-a,-b)\rho(p,q)\varphi, \varphi\rangle = \langle e^{\pi i(pb-qa)}\rho(p-a,q-b)\varphi, \varphi\rangle \\ &= e^{\pi i(pb-qa)}\Phi(p-a,q-b) = e^{\pi i(pb-qa)}e^{-\frac{\pi}{2}((p-a)^2+(q-b)^2)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Det ses desuden for $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, at

$$\begin{aligned} \langle \rho(\Phi)f, g\rangle &= \iint \Phi(p,q)V(f,g)(p,q)\,dp\,dq \\ &= \iint V(\varphi,\varphi)(p,q)V(f,g)(p,q)\,dp\,dq \\ &= \langle V(f,g), V(\varphi,\varphi)\rangle \\ &= \langle f,\varphi\rangle\langle\varphi,g\rangle, \end{aligned}$$

hvor sidste lighed følger af (1.2), men der står at læse, at $\rho(\Phi)f = \langle f, \varphi\rangle\varphi$. Ved tredobbelt anvendelse heraf fås, at

$$\begin{aligned}\rho(\Phi)\rho(a,b)\rho(\Phi)f &= \rho(\Phi)\rho(a,b)(\langle f,\varphi\rangle\varphi)\\ &= \langle f,\varphi\rangle\langle\rho(a,b)\varphi,\varphi\rangle\varphi = \Phi(a,b)\langle f,\varphi\rangle\varphi\\ &= \Phi(a,b)\rho(\Phi)f = e^{-\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)}\rho(\Phi)f,\end{aligned}$$

så $\rho(\Phi)\rho(a,b)\rho(\Phi) = e^{-\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)}\rho(\Phi)$. Fra (1.4) haves, at $\rho(a,b)\rho(\Phi) = \rho(G)$, hvor $G(p,q) = e^{\pi i(aq-pb)}\Phi(p-a,q-b) = \overline{\Phi^{ab}}(p,q)$; sidste lighedstegn ifølge (1.5). Ved at anvende $\rho(\Phi)$ herpå, giver resultatet ovenfor os, at

$$e^{-\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)}\rho(\Phi) = \rho(\Phi)\rho(a,b)\rho(\Phi) = \rho(\Phi)\rho(\overline{\Phi^{ab}}) = \rho(\Phi\natural\overline{\Phi^{ab}}),$$

og da ρ er tro medfører det, at

$$e^{-\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)}\Phi = \Phi\natural\overline{\Phi^{ab}}. \tag{1.6}$$

Vi retter nu opmærksomheden mod den generelle repræsentation. Bemærk at stort set eneste egenskab ved ρ, der er brugt ovenfor, er, at den er en homomorfi. Antagelsen om at $\pi(0,0,t) = e^{2\pi i t}I$ sikrer, at (1.3) også gælder med ρ erstattet med π. Som med ρ indføres $\pi(p,q) = \pi(p,q,0)$ og $\pi(F) = \iint F(p,q)\pi(p,q)\,dp\,dq$. Ved at gennemgå alle argumenterne med π i stedet for ρ, fås altså på præcis samme måde, at

$$\begin{aligned}&\pi(F)\pi(G) = \pi(F\natural G),\\ &\pi(a,b)\pi(F) = \pi(G), \quad \text{hvor } G(p,q) = e^{\pi i(aq-bp)}F(p-a,q-b),\\ &\pi(F)\pi(a,b) = \pi(H), \quad \text{hvor } H(p,q) = e^{\pi i(bp-aq)}F(p-a,q-b),\end{aligned}$$

og der gælder tillige (igen på samme måde som før), at π er tro. Ved at benytte ovenstående ligninger samt (1.6) opnås

$$\begin{aligned}\pi(\Phi)\pi(a,b)\pi(\Phi) &= \pi(\Phi)\pi(e^{\pi i(aq-bp)}\Phi(p-a,q-b)) = \pi(\Phi)\pi(\overline{\Phi^{ab}}) = \pi(\Phi\natural\overline{\Phi^{ab}})\\ &= e^{-\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)}\pi(\Phi).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ved at vælge $a = b = 0$ står her blot $\pi(\Phi)^2 = \pi(\Phi)$. Da $\Phi(p,q) = \Phi(-p,-q)$ og Φ er reel, er

$$\begin{aligned}\langle\pi(\Phi)u,v\rangle &= \iint \Phi(p,q)\langle\pi(p,q)u,v\rangle\,dp\,dq\\ &= \iint \Phi(p,q)\langle u,\pi(-p,-q)v\rangle\,dp\,dq\\ &= \iint \Phi(p,q)\langle u,\pi(p,q)v\rangle\,dp\,dq\\ &= \overline{\iint \Phi(p,q)\langle\pi(p,q)v,u\rangle\,dp\,dq}\\ &= \overline{\langle\pi(\Phi)v,u\rangle} = \langle u,\pi(\Phi)v\rangle,\end{aligned}$$

og $\pi(\Phi)$ er selvadjungeret og altså en projektion. Sæt nu $\mathcal{R} = R(\pi(\Phi))$, billedet af $\pi(\Phi)$. For $u,v \in \mathcal{R}$ gælder $u = \pi(\Phi)u$ og $v = \pi(\Phi)v$, og (1.7) giver, at

$$\begin{aligned}\langle\pi(p,q)u,\pi(r,s)v\rangle &= \langle\pi(-r,-s)\pi(p,q)\pi(\Phi)u,\pi(\Phi)v\rangle\\ &= e^{\pi i(ps-qr)}\langle\pi(\Phi)\pi(p-r,q-s)\pi(\Phi)u,v\rangle\\ &= e^{\pi i(ps-qr)}e^{-\frac{\pi}{2}((p-r)^2+(q-s)^2)}\langle u,v\rangle.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Lad nu $\{v_\alpha\}$ være en ortonormalbasis for $\mathcal{R}$ og lad $\mathcal{H}_\alpha$ være afslutningen af det lineære span af $\{\pi(p,q)v_\alpha \mid p,q \in \mathbb{R}^n\}$. Af (1.8) kan læses, at $\mathcal{H}_\alpha \perp \mathcal{H}_\beta$ for $\alpha \neq \beta$, og pr. konstruktion er $\mathcal{H}_\alpha$ invariant under π for alle α. Lad $u \in \mathcal{N} = (\bigoplus \mathcal{H}_\alpha)^\perp$ og $v \in \bigoplus \mathcal{H}_\alpha$. Pr. definition af den direkte sum er da $v = \sum_\alpha w_\alpha$ for tælleligt mange w_α, der alle ligger i ét $\mathcal{H}_\alpha$. Kontinuiteten af det indre produkt giver da, at $\langle \pi(p,q)u, v\rangle = \langle u, \pi(-p,-q)v\rangle = 0$, så $\mathcal{N}$ er ligeledes invariant under π. Da $\pi(\Phi)$ er selvadjungeret, er det ortogonale komplement til nulrummet af $\pi(\Phi)$ netop $N(\pi(\Phi))^\perp = R(\pi(\Phi)) = \mathcal{R} \subseteq \bigoplus \mathcal{H}_\alpha$, men det betyder, at $\mathcal{N} \subseteq N(\pi(\Phi))$ og altså, at $\pi(\Phi)_{|\mathcal{N}} = 0$. Dette medfører imidlertid også, at $\mathcal{N} = \{0\}$: Da $\mathcal{N}$ er invariant under π, kunne vi i modsat fald betragte $\pi_{|\mathcal{N}}$. Den integrerede version af $\pi_{|\mathcal{N}}$ ville igen være tro, så vi ville have $\pi(\Phi)_{|\mathcal{N}} \neq 0$ i modstrid med det netop viste. Det betyder altså, at $\bigoplus \mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}$. Lad os derfor endelig se, at $\pi_{|\mathcal{H}_\alpha}$ er unitært ækvivalent med ρ for alle α, så lad α være givet og sæt $v^{pq} = \pi(p,q)v_\alpha$. Fra (1.5) og (1.8) ved vi, at

$$\begin{aligned}\langle v^{pq}, v^{rs}\rangle &= e^{\pi i(ps-qr)}e^{-(\pi/2)((p-r)^2+(q-s)^2)}\langle v_\alpha, v_\alpha\rangle \\ &= \langle \varphi^{pq}, \varphi^{rs}\rangle.\end{aligned}$$

Lad nu $u \in \mathcal{H}_\alpha$ og $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ og skriv $u = \sum_{j,k} a_{jk} v^{p_j q_k}$ og $f = \sum_{j,k} a_{jk}\varphi^{p_j q_k}$; da giver ovenstående pr. linearitet, at $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \langle f,f\rangle = \|f\|^2$. Definer nu $\gamma : \mathcal{H}_\alpha \to L^2(\mathbb{R}^n)$ som den kontinuerte lineære afbildning, der på basen opfylder $\gamma(v^{pq}) = \varphi^{pq} = \rho(p,q)\varphi$. Da bliver γ ifølge det ovenstående en isometrisk isomorfi, og $\gamma \circ \pi(p,q)_{|\mathcal{H}_\alpha} = \rho(p,q)\circ\gamma$, hvilket jo netop vil sige, at $\gamma \in \mathcal{C}(\pi_{|\mathcal{H}_\alpha}, \rho)$ og altså, at $\pi_{|\mathcal{H}_\alpha}$ og ρ er unitært ækvivalente, og vi er færdige.

□

Med dette resultat i baghånden er det muligt at give en fuldstændig klassifikation af alle irreducible unitære repræsentationer af Heisenberggruppen. Først behøves dog et grundlæggende hjælperesultat fra repræsentationsteorien:

Lemma 1.10 (Schurs lemma)**.** *Lad π være en unitær repræsentation af G på $\mathcal{H}$. Da er π irreducibel, hvis og kun hvis $\mathcal{C}(\pi,\pi) = \{cI \mid c \in \mathbb{C}\}$.*

Bevis. Antag først, at $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{H}$ er et ikketrivielt lukket underrum, der er invariant under π. Som i beviset for Stone–von Neumanns sætning er også $\mathcal{M}^\perp$ invariant under π, da π er unitær. Ortogonalprojektionen $P(\mathcal{M})$ på $\mathcal{M}$ er da et element i $\mathcal{C}(\pi,\pi)$: Lad $g \in G$ og $x \in \mathcal{H}$ og skriv $x = y + z$ med $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^\perp$. Af invariansen af $\mathcal{M}$ og $\mathcal{M}^\perp$ under π følger, at

$$\pi(g)P(\mathcal{M})x = \pi(g)y = P(\mathcal{M})\pi(g)(y+z) = P(\mathcal{M})\pi(g)x,$$

men $P(\mathcal{M})$ er ikke på formen cI. Antag omvendt, at $T \in \mathcal{C}(\pi,\pi)$ og at $T \neq cI$. Da $\pi(g)^* = \pi(g^{-1})$, er

$$\begin{aligned}\langle T^*\pi(g)x, y\rangle &= \langle \pi(g)x, Ty\rangle = \langle x, \pi(g^{-1})Ty\rangle \\ &= \langle x, T\pi(g^{-1})y\rangle = \langle T^*x, \pi(g^{-1})y\rangle = \langle \pi(g)T^*x, y\rangle,\end{aligned}$$

så $T^* \in \mathcal{C}(\pi,\pi)$. Det samme gælder derfor operatorerne $A_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ og $A_2 = \frac{1}{2}i(T - T^*)$, der begge er selvadjungerede. En af disse to er ikke på formen cI, thi hvis $A_1 = c_1 I, A_2 = c_2 I$ ville gælde $(c_1 - ic_2)I = A_1 - iA_2 = T$, der var antaget forskellig fra cI for alle c. Antag derfor uden tab af generalitet at $A_1 \neq cI$. Målet er nu at bruge dette faktum til at fremskaffe en ikkenul projektion forskellig fra identiteten, hvis billede er invariant under π. Lad derfor $x \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$ og lad E være spektralopløsningen af A_1 (der jo er selvadjungeret og dermed specielt normal), så $A = \int_{\sigma(A_1)} \mathrm{id}_{\sigma(A_1)}\, dE$. If. [6, stn. 2.16] (med mængden af simple funktioner på $\sigma(A_1)$ som $\mathcal{A}$) kan vi, da $\sigma(A_1)$ er kompakt, vælge en simpel funktion $f : \sigma(A_1) \to \mathbb{C}$, så $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{B_i}$ for indbyrdes disjunkte mængder

B_i og så $\|f - \mathrm{id}_{\sigma(A_1)}\| < \varepsilon / E_x(\sigma(A_1))$ (bemærk at $E_x(\sigma(A_1)) = \langle E(\sigma(A_1))x, x\rangle < \infty$). Antag for modstrid om alle i at $E(B_i) = I$ eller $E(B_i) = 0$. Hvis $E(B_i) = 0$ for alle B_i er $A_1 = 0$ og altså på formen cI i modstrid med det ovenstående. Antag derfor, at $E(B_i) = I$ for mindst et B_i. Da de var antaget disjunkte, findes et k, så $E(B_i) = 1$ for $i = k$, og $E(B_i) = 0$ for $i \neq k$. Bemærk nu, at vi pr. definition af integration mht. E har

$$\langle A_1 x, x\rangle = \left\langle \left(\int_{\sigma(A_1)} \mathrm{id}_{\sigma(A_1)} dE \right) x, x \right\rangle = \int_{\sigma(A_1)} \mathrm{id}_{\sigma(A_1)}\, dE_x.$$

Vi har desuden

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(A_1)} f\, dE_x &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \mathbf{1}_{B_i}\, dE_x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle E(B_i)x, x\rangle \\ &= \langle \alpha_k x, x\rangle.\end{aligned}$$

Den valgte approksimation sikrer nu modstriden, thi

$$\begin{aligned}|\langle A_1 x, x\rangle - \langle \alpha_k x, x\rangle| &= \left| \int_{\sigma(A_1)} \mathrm{id}_{\sigma(A_1)}\, dE_x - \int_{\sigma(A_1)} f\, dE_x \right| \\ &\leq \left| \int_{\sigma(A_1)} \mathrm{id}_{\sigma(A_1)} - f\, dE_x \right| \\ &\leq \|\mathrm{id}_{\sigma(A_1)} - f\|_\infty E_x(\sigma(A_1)) < \varepsilon,\end{aligned}$$

og da ε var vilkårlig, er $A_1 = \alpha_k I$. Altså må der findes et j, så vi både har $E(B_j) \neq 0$ og $E(B_j) \neq I$. Påstanden er nu, at $E(B_j) \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$, hvilket følger direkte af konstruktionen af spektralopløsningen: Lad, som i beviset for spektralsætningen, E' være en opløsning af enheden, så $A_1 = \int_\Delta \hat{A}_1\, dE'$, hvor $\hat{A}_1$ er Gelfandtransformationen af A_1, og Δ er karakterrummet; en sådan findes if. [6, stn. 3.24 (a)]. Som i spektralsætningen har vi fra [6, stn. 3.1] en homøomorfi $\kappa : \Delta \to \sigma(T)$, så $E = E' \circ \kappa^{-1}$. Nu giver [6, stn. 3.24 (c)], at $E'(\kappa^{-1}(B_j)) \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$, da $A_1 \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$, men det betyder jo netop, at $E(B_j) \in \mathcal{C}(\pi, \pi)$. Lemmaet følger nu let. Da $E(B_j)$ er en projektion, er $R(E(B_j))$ et lukket underrum af $\mathcal{H}$ ifølge [6, lem 3.13]. Lad nu $x \in R(E(B_j))$ og lad $y \in \mathcal{H}$ så $x = E(B_j)y$. Da er $\pi(g)x = \pi(g)E(B_j)y = E(B_j)\pi(g)y \in R(E(B_j))$, og $R(E(B_j))$ er et lukket, ikketrivielt og ægte underrum af $\mathcal{H}$, der er invariant under π, hvilket viser lemmaet.

□

Sætning 1.11. *Enhver irreducibel unitær repræsentation af $\mathbf{H}_n$ på $\mathcal{H}$ er unitært ækvivalent med en og kun en af følgende repræsentationer:*

(a) ρ_h, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *på* $L^2(\mathbb{R}^n)$,

(b) $\sigma_{ab}(p, q, t) = e^{2\pi i(ap+bq)}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, *på* $\mathbb{C}$.

Bevis. Lad π være en unitær repræsentation af $\mathbf{H}_n$ på $\mathcal{H}$. Da π er en homomorfi, er elementerne i $\mathcal{C}(\pi, \pi)$ netop de, der fremkommer ved at anvende π på elemeterne i centeret, $\mathcal{Z}$, af $\mathbf{H}_n$. Lad $(p, q, t) \in \mathcal{Z}$, $(p', q', t') \in \mathcal{H}$. Af gruppemultiplikationen fremgår, at $pq' - qp' = -pq' + qp'$, så $pq' = qp'$ og altså $p = q = 0$, da p' og q' var vilkårlige. Altså er $\mathcal{Z} = \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. For et givet $t \in \mathbb{R}$ er altså $\pi(0, 0, t) = cI$ for et $c \in \mathbb{C}$. Lad $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Da π er unitær, er

$$|c|\|x\| = \|cx\| = \|\pi(0, 0, t)x\| = \|x\|,$$

så $|c| = 1$, og π afbilder altså $\mathcal{Z}$ homomorft på $\{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$. Med andre ord er $\pi(0, 0, t) = e^{2\pi i h t} I$ for et $h \in \mathbb{R}$. Hvis $h \neq 0$ giver Stone–von Neumanns sætning, at

π er unitært ækvivalent med ρ_h. For $h = 0$ virker π trivielt på centeret; $\pi(0,0,t) = I$ for alle t. Som i beviset for Stone–von Neumanns sætning betragtes derfor afbildningen $\pi(p,q) = \pi(p,q,0)$, der er en repræsentation af $\mathbb{R}^{2n}$, som er irreducibel og unitær (da $\pi(p,q,t)$ er det), og som opfylder

$$\pi(p',q')\pi(p,q) = \pi(p'+p,q'+q) = \pi(p+p',q+q') = \pi(p,q)\pi(p',q').$$

For et givet (p',q') giver Schurs lemma da, at $\pi(p',q') = c(p',q')I$ for en afbildning $c : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ med $|c(p',q')| = 1$ for alle $p',q' \in \mathbb{R}^n$. Det følger af ovenstående, at

$$c(p+p',q+q') = c(p,q)c(p',q'). \tag{1.9}$$

For alle $x \in \mathcal{H}$ og for alle følger $(p_n) \to p, (q_n) \to q$ i $\mathbb{R}^n$ gælder nu

$$|c(p,q) - c(p_n,q_n)|\|x\| = \|c(p,q)x - c(p_n,q_n)x\| = \|\pi(p,q)x - \pi(p_n,q_n)x\| \to 0$$

for $n \to \infty$, da π er stærkt kontinuert. Med andre ord er også c kontinuert. Lad $e_1, \dots e_{2n}$ være den kanoniske basis for $\mathbb{R}^{2n}$ og betragt heltallige k, $1 \le k \le 2n$. Da c afbilder på enhedscirklen i $\mathbb{C}$ findes et $a_k \in \mathbb{R}$ så $c(e_k) = e^{2\pi i a_k}$. For $N \in \mathbb{N}$ giver (1.9), at $c(Ne_k) = (c(e_k))^N$ og for $m,n \in \mathbb{N}$ er $c(\frac{n}{m}e_k) = (c(e_k))^{\frac{n}{m}}$. Da c er ikkenul overalt, og $1 = c(0) = c(p-p,q-q) = c(p,q)c(-p,-q)$ for alle $p,q \in \mathbb{R}^n$ gælder, at $c(\lambda e_k) = (c(e_k))^\lambda$ for alle $\lambda \in \mathbb{Q}$. Det følger nu af kontinuiteten af c, at $c(xe_k) = (c(e_k))^x = e^{2\pi i a_k x}$ for alle k. Idet vi, udelukkende for at lette notationen, sætter $b_i = a_{i+n}$ for $1 \le i \le n$, $a = (a_1,\dots,a_n)$ og $b = (b_1,\dots,b_n)$ fås for generelle $p = (p_1,\dots,p_n)$ og $q = (q_1,\dots,q_n)$, at

$$\pi(p,q,t) = \pi(p,q) = c(p,q)I = e^{2\pi i(pa+qb)}I,$$

idet (1.9) igen er brugt gentagne gange. Tag nu et $v \in \mathcal{H}$, $\|v\| = 1$. Ovenstående udregning viser, at $\mathbb{C}v$ er invariant under π, og da π er irreducibel gælder derfor, at $\mathcal{H} = \mathbb{C}v$. Lad derfor $T : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ være den lineære afbildning, der opfylder $T(v) = 1$. Lad $u \in \mathcal{H}$ og skriv $u = zv$ for et $z \in \mathbb{C}$. Da er

$$\begin{aligned}\sigma_{ab}(p,q,t)T(u) &= z\sigma_{ab}(p,q,t)T(v) = ze^{2\pi i(pa+qb)} \\ &= T(e^{2\pi i(pa+qb)}u) = T\pi(p,q,t)(u)\end{aligned}$$

for alle $(p,q,t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ og $\|u\| = |z| = |T(u)|$. For $h = 0$ er T altså en unitær sammenflettende operator mellem π og σ_{ab}, hvilket viser sætningen.

□

2 Sætningen i kvantemekanikken

Som nævnt i indledningen udtaler Stone–von Neumanns sætning sig om ækvivalensen af de forskellige teorier om kvantemekanikken. For nærmere at forstå dette introduceres nu den centrale matematiske ramme, der først så lyset i en afhandling fra 1927 af David Hilbert, og som blev gjort eksplicit af John von Neumann i årene, der fulgte.

2.1 Kvantemekanikkens matematiske struktur

Kvantemekanikkens grundlæggende begreber, som også kendes fra den klassiske mekanik, er *tilstande* og *observable*. Hvorimens man i det klassiske tilfælde ofte beskriver systemer af n partikler i rummet $\mathbb{R}^{3n}$ er det kvantemekaniske tilfælde noget mere kompliceret, idet vi har følgende grundlæggende aksiom.

Aksiom 1. Teorien for et kvantemekanisk system formuleres i et komplekst Hilbertrum $\mathcal{H}$. En *tilstand* i systemet repræsenteres af en afbildning, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ med $\|\Psi(t)\| > 0$ for alle t. Undertiden kaldes $\Psi(t)$ en tilstand for ethvert t, og man associerer ofte ethvert skalarmultiplum, $c\Psi$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, af partiklen med partiklen selv. En *observabel* repræsenteres i formalismen af en selvadjungeret operator i Hilbertrummet, og kræves at have den fysiske egenskab, at den kan bestemmes ved en empirisk procedure.

Eksempler på observable er de velkendte position, Q, og impuls, P, der virker på positionsrummet $L^2(\mathbb{R})$ ved

$$Qf(x) = xf(x), \quad Pf(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}f(x),$$

hvor $\hbar$ her er den velkendte (reducerede) Plancks konstant. Det er imidlertid klart, at definitionsmængden for Q ikke kan være hele $L^2(\mathbb{R})$, og det samme gælder om P, da ikke alle elementer i $L^2(\mathbb{R})$ er differentiable, og den relevante teori i beskrivelsen af kvantemekanikken er teorien for ubegrænsede operatorer (ikke at ubegrænsede operatorer aldrig kan defineres overalt, men som det fremgår af Stn. A.7, får vi problemer med de selvadjungerede). Således kræver begrebet "selvadjungerethed" nogle kommentarer, og der vil generelt opstå vanskeligheder, når operatorernes definitionsområder indskrænkes. En komplet gennemgang af teorien om ubegrænsede operatorer vil være for omfattende til inklusion i denne opgave, men for fuldstændighedens skyld er de væsentligste begreber forklaret i appendiks A.

Det er klart, at ikke alle afbildninger $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ kan bruges som beskrivelser af partikler; som i det klassiske tilfælde må vi kræve opfyldelsen af en dynamisk lov, og det er her, man støder på to, på overfladen, tilsyneladende forskellige bud.

2.2 Schrödingerbilledet

I Schrödingerbilledet er denne dynamiske lov den velkendte Schrödingerligning: Idet vi postulerer, at der til et hvert kvantemekanisk system hører en såkaldt Hamiltonoperator, H, der repræsenterer systemets totale energi, kræver vi af vore tilstande, at de skal opfylde Schrödingerligningen

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t). \tag{2.1}$$

Her er

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Psi(t+\Delta t) - \Psi(t)}{\Delta t},$$

hvor s-lim her betegner den såkaldte stærke grænseværdi; $A = \text{s-lim}_{t\to t_0} A(t)$, hvis $\lim_{t\to t_0} \|(A(t) - A)\varphi\| = 0$ for alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Imidlertid er H typisk ubegrænset, og vi kan således ikke forvente at finde tidsudviklingen af vilkårlige tilstande $\Psi(t_0) \in \mathcal{H}$. For at undgå dette problem indføres i stedet tidsudviklingsoperatoren

$$U(t, t_0) = \exp(-(i/\hbar)H(t - t_0)) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(i/\hbar)\lambda(t-t_0)} dE(\lambda), \tag{2.2}$$

hvor E er spektralopløsningen af H (se Stn. A.8); denne kan vises at være en begrænset og overalt defineret operator – man kan sige meget mere om disse såkaldte unitære enparametergrupper, som her behandles lettere lemfældigt, men det ligger uden for denne opgave at gøre det. Under benyttelse af spektralteorien for ubegrænsede operatorer, kan man udlede følgende sætning, hvis bevis dog ikke er medtaget her.

Sætning 2.1. *Lad A være en selvadjungeret operator i $\mathcal{H}$ og sæt $U_t = e^{iAt}$ for $t \in \mathbb{R}$. Da gælder følgende:*

(a) $U_0 = I$.

(b) U_t *er en unitær operator på* $\mathcal{H}$ *for alle* $t \in \mathbb{R}$.

(c) $U_{t_1}U_{t_2} = U_{t_1+t_2}$ *for alle* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

(d) For $\varphi \in \mathcal{D}_A$ *(se app. A) er*

$$iAf = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to 0} \frac{U_t\varphi - \varphi}{t}.$$

Denne sætning giver nu et alternativ til beskrivelsen af tidsudviklingen ved hjælp af tidsudviklingsoperatoren i (2.2). Vi får fra (a) og (d), at

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to t_0} \frac{U(t,t_0) - I}{t - t_0}\varphi = -\frac{i}{\hbar}H\varphi,$$

for $\varphi \in \mathcal{D}_H$, og (c) giver, at

$$U(t, t_0)U(t_0, t_1) = U(t, t_1), \quad t, t_0, t_1 \in \mathbb{R}.$$

Idet det kan indses, at $U(t, t_0)$ kommuterer med spektralprojektionerne $E(B)$ for Borelmængder B, giver Stn. A.8, at $\mathcal{D}_H$ er invariant under $U(t, t_0)$, idet $\langle E(B)\varphi, \varphi\rangle = \langle E(B)U(t, t_0)\varphi, U(t, t_0)\varphi\rangle$. Samlet giver de ovenstående observationer os, at vi for $\varphi \in \mathcal{D}_H$ har

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0)\varphi &= i\hbar \operatorname*{s\text{-}lim}_{\Delta t\to 0} \frac{U(t+\Delta t, t_0) - U(t,t_0)}{\Delta t}\varphi \\ &= i\hbar \operatorname*{s\text{-}lim}_{\Delta t\to 0} \frac{U(t+\Delta t, t) - I}{\Delta t} U(t,t_0)\varphi \\ &= i\hbar(-(i/\hbar))HU(t,t_0)\varphi = HU(t,t_0)\varphi. \end{aligned}$$

Med andre ord gælder, at hvis $\Psi_0 \in \mathcal{D}_H$, da opfylder vektorfunktionen

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi_0$$

Schrödingerligningen (2.1) med begyndelsesbetingelsen

$$\Psi(t_0) = U(t_0, t_0)\Psi_0 = \Psi_0.$$

Den slående egenskab ved Schrödingers beskrivelse er, at tidsudviklingen ligger i tilstandene, mens vore observable er tidsuafhængige. Imidlertid må man i nogle situationer (som eksempelvis ved vekselvirkende systemer) stille sig tilfreds en Hamiltonoperator, der også afhænger af tiden. Det leder os, sammen med ovenstående udledning, til følgende karakterisation af Schrödingerbilledet.

Aksiom S1. Til ethvert kvantemekanisk system knyttes en Hamiltonoperator $H(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, som er selvadjungeret for ethvert $t \in \mathbb{R}$, og $H(t)$ repræsenterer den totale energi i systemet.

Aksiom S2. De observable, som ikke afhænger af energien, repræsenteres ved selvadjungerede operatorer i $\mathcal{H}$, der ikke afhænger af t.

Aksiom S3. Der eksisterer en unitær afbildning $U(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, kaldet *tidsudviklingsoperatoren*, som for $t, t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ opfylder, at

$$U(t_0, t_0) = I, \quad U(t, t_1)U(t_1, t_0) = U(t, t_0),$$

og for $\varphi \in \mathcal{D}_{H(t)}$ at

$$i\hbar \operatorname*{s-lim}_{t_1 \to t} \frac{U(t_1, t) - I}{t_1 - t}\varphi = i\hbar \operatorname*{s-lim}_{t_2 \to t} \frac{U(t, t_2) - I}{t - t_2}\varphi = H(t)\varphi. \tag{2.3}$$

Det bemærkes, at vi har en sådan fra (2.2) i tilfældet, hvor H ikke afhænger af tiden.

Aksiom S4. En tilstand repræsenteres ved en afbildning $\Psi : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$, der for alle $t \in \mathbb{R}$ opfylder

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0), \quad \|\Psi(t_0)\| > 0,$$

for alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$. For $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ repræsenterer $c\Psi$ og Ψ samme tilstand.

2.3 Heisenbergbilledet

Omvendt forholder det sig i Heisenbergbilledet, hvor tidsafhængigheden placeres på de observable. I det følgende udledes denne beskrivelse ud fra den ovenfor givne.

Det er et velkendt faktum, at sammenhængen mellem formalismen og det fysiske eksperiment ligger i middelværdien af operatorerne; givet en begrænset operator, A, som repræsenterer en observabel, er middelværdien af A i tilstanden Ψ givet ved

$$\langle A\rangle_\Psi(t) = \langle \Psi(t), A\Psi(t)\rangle = \langle U(t,0)\hat{\Psi}, AU(t,0)\hat{\Psi}\rangle,$$

idet vi her sætter $\Psi(t) = U(t,0)\hat{\Psi}$, og $\hat{\Psi} = \Psi(0)$. Ved for hvert $t \in \mathbb{R}$ at indføre operatoren $\hat{A}(t) = U^{-1}(t,0)AU(t,0)$ kan vi skrive middelværdien som $\langle A\rangle_\Psi(t) = \langle \hat{\Psi}, \hat{A}(t)\hat{\Psi}\rangle$, og vi er således i stand til at beskrive den samme fysik som i Schrödingerbilledet ved hjælp af vektoren $\hat{\Psi}$ og operatorerne $\hat{A}(t)$. For en given ubegrænset operator D sættes på tilsvarende vis $\hat{D}(t) = U^{-1}(t,0)DU(t,0)$, som er selvadjungeret for alle $t \in \mathbb{R}$, da $U(t,0)$ er unitær (se Lem. A.5), og vi sætter $\hat{H}(t) = U^{-1}(t,0)H(t)U(t,0)$. Med disse begreber er det muligt at opstille en aksiomsliste som ovenfor, men først betragtes Heisenbergbilledets pendant til Schrödingerbilledets dynamiske lov, hvis bevis ikke er medtaget her:

Sætning 2.2 (Heisenbergligningen)**.** *Lad $\hat{A}(t)$ repræsentere en observabel i Heisenbergbilledet og antag, at den samme observabel er repræsenteret af en begrænset operator A i Schrödingerbilledet. Hvis φ og $\hat{A}(t)\varphi$ ligger i $\mathcal{D}_{\hat{H}(t)}$ for alle $t \in \mathbb{R}$, så opfylder $\hat{A}(t)\varphi$* Heisenbergligningen

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt}\varphi = [\hat{A}(t), \hat{H}(t)]\varphi,$$

hvor $[\hat{A}(t), \hat{H}(t)] = \hat{A}(t)\hat{H}(t) - \hat{H}(t)\hat{A}(t)$ er kommutatoren af de to observable, og

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt}\varphi = \operatorname*{s-lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{A}(t+\Delta t) - \hat{A}(t)}{\Delta t}\varphi.$$

Vi indfører nu $\hat{U}(t) = U(t,0)$. Med denne notation er $\hat{A}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}(0)\hat{U}(t)$, og fra (2.3) får vi, idet vi bemærker, at $U^{-1}(t,0) = U(0,t)$, at

$$\begin{aligned} i\hbar \operatorname*{s-lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{U}(t+\Delta t) - \hat{U}(t)}{\Delta t}\varphi &= i\hbar \frac{U(t+\Delta t, 0)U(0,t) - I}{\Delta t}\hat{U}(t)\varphi \\ &= i\hbar \frac{U(t+\Delta t, t) - I}{\Delta t}\hat{U}(t)\varphi = H(t)\hat{U}(t)\varphi \\ &= \hat{U}(t)\hat{H}(t)\varphi, \end{aligned}$$

for $\hat{U}\varphi \in \mathcal{D}_{H(t)}$, hvilket ifølge definitionen på $\hat{H}(t)$ vil sige $\varphi \in \mathcal{D}_{\hat{H}(t)}$. Hermed kan vi opstille følgende aksiomer, der karakteriserer Heisenbergbilledet (uden henvisninger til Schrödingerbilledet der brugtes i udledningen).

Aksiom H1. Til ethvert kvantemekanisk system tilknyttes en Hamiltonoperator $\hat{H}(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, som er selvadjungeret for ethvert $t \in \mathbb{R}$, og $\hat{H}(t)$ repræsenterer den totale energi i systemet.

Aksiom H2. En tilstand i systemet repræsenteres af en vektor $\hat{\Psi} \in \mathcal{H}$, som er uafhængig af tiden.

Aksiom H3. Der findes en unitær operator $\hat{U}(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, med $\hat{U}(0) = I$, og for alle $\varphi \in \mathcal{D}_{\hat{H}(t)}$ er

$$i\hbar \operatorname*{s-lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{U}(t+\Delta t) - \hat{U}(t)}{\Delta t}\varphi = \hat{U}(t)\hat{H}(t)\varphi.$$

Aksiom H4. En observabel er repræsenteret ved operatorer $\hat{A}(t)$ i $\mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, som er selvadjungerede for alle $t \in \mathbb{R}$, og opfylder ligningen $\hat{A}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}(0)\hat{U}(t)$.

2.4 Kanoniske kommutationsrelationer

Historisk var den væsentligste erkendelse i Schrödingers model for kvantemekanikken brugen af funktionsrummet L^2 til beskrivelse af tilstandene og de selvadjungerede operatorer heri til beskrivelse af de observable. I Heisenbergs model var det imidlertid de såkaldte kanoniske kommutatorrelationer, der udgjorde fundamentet. I det følgende vil vi se nærmere på disse og indse, at de to tilgange i en vis forstand er ækvivalente.

Lad os derfor vende opmærksomheden tilbage på position og impuls, som de blev beskrevet i begyndelsen af dette kapitel. Betragtes et kvantemekanisk system bestående af n partikler i én dimension (for notationens skyld; det generaliserer umiddelbart til flere) repræsenteret ved positionsrummet $L^2(\mathbb{R}^n)$, hvor position hhv. impuls af i'te partikel er repræsenteret ved operatorerne

$$Q_i\psi(x_1,\dots,x_n) = x_i\psi(x_1,\dots,x_n) \quad \text{hhv.} \quad P_i\psi(x_1,\dots,x_n) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(x_1,\dots,x_n) \tag{2.4}$$

for $\psi \in \mathcal{D}_{Q_i}$ hhv. $\psi \in \mathcal{D}_{P_i}$. Det bemærkes, at Q_i alle kommuterer indbyrdes, og at det samme gælder P_i (om ikke andet, så under den indskrænkning at vi kræver at Clairauts sætning om partielt afledede gælder for elementerne i $\mathcal{D}_{P_i}$). For $\psi \in \mathcal{D}_{[Q_i,P_j]}$ viser en direkte udregning, at $[Q_i, P_j]\psi = i\hbar\delta_{ij}\psi$, hvor δ_{ij} er Kroneckers delta. Denne kommutatoregenskab kaldes undertiden den kanoniske kommutatorrelation, og mere generelt siger vi følgende.

Definition 2.3. $2n$ selvadjungerede operatorer $Q_1,\dots,Q_n,P_1,\dots,P_n$ i et Hilbertrum $\mathcal{H}$ siges disse at opfylde de kanoniske kommutatorrelationer, hvis $[Q_i,P_j]\psi = i\hbar\delta_{ij}\psi$ for $i,j = 1,\dots,n$ og $\psi \in \mathcal{D}_{[Q_i,P_j]}$ og $[Q_i,Q_j] = [P_i,P_j] = 0$ for $i,j = 1,\dots,n$ og ψ i de tilhørende definitionsmængder. Operatorerne Q_k og P_k kaldes kanonisk konjugerede for $k = 1,\dots,n$. Desuden siges ofte, at de $2n$ operatorer er en *repræsentation* af de kanoniske kommutatorrelationer (ligheden med det tilsvarende matematiske begreb vil fremgå sidst i kapitlet).

Lad $Q_1,\dots,Q_n,P_1,\dots,P_n$ opfylde de kanoniske kommutatorrelationer og lad desuden $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ være en Hilbertrumsisomorfi. Sæt nu $Q_i' = UQ_iU^{-1}$ og $P_i' = UP_iU^{-1}$; da kan det let verificeres, at også $Q_1',\dots,Q_n',P_1',\dots,P_n'$ opfylder de kanoniske kommutatorrelationer; at de er selvadjungerede følger af Stn. A.5, og selve relationen kan let tjekkes. Repræsentationer af kommutatorrelationerne, der hænger sammen som ovenfor, kaldes *unitært ækvivalente*, og det naturlige spørgsmål er nu, om *alle* repræsentationer af kommutatorrelationerne er unitært ækvivalente. Det er netop *dette* spørgsmål, som Stone–von Neumanns sætning søger at svare på; svaret er, måske ikke overraskende, et ja, op til visse betingelser. Det resterende af denne opgave vil forsøge at retfærdiggøre dette udsagn. Det kan først bemærkes, at $\mathcal{H}$ ikke kan være endeligdimensional, thi sporet af en kommutator i et endeligdimensionalt rum altid er 0, men vi har jo $\mathrm{tr}(i\hbar I) = i\hbar\dim(\mathcal{H}) \neq 0$. Det er desuden blevet vist af Aurel Wintner og Helmut Wielandt, at vi umuligt kan have, at både Q_k og P_k er begrænsede. Af denne grund betragtes i stedet de eksponentierede udgaver af operatorerne: Lad os i et øjeblik glemme alt om problemer med definitionsområder og konvergens og lad os betragte de kanoniske kommutatorrelationer $[Q_k, P_k] = i\hbar$. For begrænsede operatorer A, B, C på $\mathcal{H}$ er $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$, og ved udnyttelse af kommutatorrelationerne (og som sagt uden bekymring om definitionsområder) giver dette ved induktion, at $[Q_k, P_k^n] = i\hbar nP^{n-1}$. For $u_k \in \mathbb{R}$ sættes nu

$$e^{iP_ku_k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iP_ku_k)^n}{n!},$$

hvilket giver os

$$[Q, e^{iP_ku_k}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iu_k)^n}{n!}[Q, P_k^n] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}u_k^nP_k^{n-1}n}{n!} = -\hbar u_ke^{iu_kP_k}.$$

Anvendelse af $e^{-iP_ku_k}$ fra venstre giver, at $e^{-iP_ku_k}Q_ke^{iP_ku_k} - Q_k = -\hbar u_k$ og ved addition af Q_k og ved at tage n'te potens heraf fås

$$e^{-iP_ku_k}Q_k^ne^{iP_ku_k} = (Q_k - \hbar u_k)^n.$$

Ved på samme måde for $v_k \in \mathbb{R}$ at lade $e^{iQ_k v_k}$ være defineret ved en "potensrække af operatorer" fås

$$\begin{aligned} e^{-iP_k u_k} e^{iQ_k v_k} e^{iP_k u_k} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iP_k u_k} \frac{(iQ_k v_k)^n}{n!} e^{iP_k u_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iQ_k v_k - i\hbar u_k v_k)^n}{n!} \\ &= e^{iQ_k v_k - i\hbar u_k v_k}. \end{aligned}$$

Dette leder os, ved anvendelse af $e^{iP_k u_k}$ fra venstre, til de såkaldte *Weylrelationer*

$$e^{iQ_k v_k} e^{iP_k u_k} = e^{-i\hbar u_k v_k} e^{iP_k u_k} e^{iQ_k v_k}, \quad v_k, u_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

der er en analog til kommutatorrelationerne med operatorer, der vides at være begrænsede. Trods ovenstående udeblivende matematiske stringens kan det vises, at kommutatorrelationerne følger af ovenstående Weylrelationer, mens det modsatte – at kommutatorrelationerne medfører Weylrelationerne (der desværre er den relevante i denne kontekst) – kræver yderligere betingelser på operatorerne; denne problemstilling vil jeg imidlertid undgå, og i det følgende betragtes udelukkende Weylrelationerne; se dog dette kapitels sidste sætning for et generelt matematisk *korrekt* resultat. Disse relationer oversættes nu til de repræsentationsteoretiske begreber i kapitel 1. Lad herefter Plancks konstant $h = 1$, så $\hbar = \frac{1}{2\pi}$, lad $s, p \in \mathbb{R}^n$, og sæt $Q = (Q_1, \ldots, Q_n), P = (P_1, \ldots, P_n), u = (u_1, \ldots, u_n)$ og $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Ved at bruge ovenstående relation med $v = 2\pi s$ og $u = 2\pi p$ fås relationen

$$e^{2\pi i s Q} e^{2\pi i p P} = e^{-2\pi i p s} e^{2\pi i p P} e^{2\pi i s Q}$$

Nu defineres

$$e^{2\pi i (pP + sQ)} = e^{-\pi i p s} e^{2\pi i p P} e^{2\pi i s Q} = e^{\pi i p s} e^{2\pi i s Q} e^{2\pi i p P},$$

idet sidste lighedstegn blot er ovenstående relation. Det er muligt at tillægge størrelser som disse en mening ved hjælp af mere generel matematisk teori, der imidlertid også ligger udenfor denne opgaves omfang, og til dette formål er den ovenstående definition tilstrækkelig. Idet vi fra spektralteorien har, at $e^{iaQ} e^{ibQ} = e^{i(a+b)Q}$ for $a, b \in \mathbb{R}^n$ og tilsvarende for P, får vi, at

$$\begin{aligned} e^{2\pi i (pP + qQ)} e^{2\pi i (rP + sQ)} &= e^{\pi i (pq + rs)} e^{2\pi i q Q} e^{2\pi i p P} e^{2\pi i s Q} e^{2\pi i r P} \\ &= e^{\pi i (2ps + pq + rs)} e^{2\pi i (q+s) Q} e^{2\pi i (p+r) P} \\ &= e^{\pi i (ps - qr)} e^{\pi i (p+r)(q+s)} e^{2\pi i (q+s) Q} e^{2\pi i (p+r) P} \\ &= e^{\pi i (ps - qr)} e^{2\pi i ((p+r)P + (q+s)Q)}. \end{aligned}$$

Sammenholdes nu med gruppeegenskaben for Heisenberggruppen fremgår det, at afbildningen $\pi : \mathbf{H}_n \to \mathcal{H}$ givet ved

$$\pi(p, q, t) = e^{2\pi i (pP + qQ + tI)} = e^{2\pi i t} e^{2\pi i (pP + qQ)}$$

er en (unitær!) repræsentation af Heisenberggruppen på Hilbertrummet $\mathcal{H}$, og her kommer Stone–von Neumanns sætning ind i billedet, idet denne jo netop udsiger, at *enhver* sådan repræsentation er unitært ækvivalent med Schrödingerrepræsentationen (i hvert fald hvis π er irreducibel). Schrödingerrepræsentationen er da også netop den repræsentation, der fremkommer ved at benytte ovenstående udtryk med Schrödingers impuls og position: Lad $p, q \in \mathbb{R}^n$ og lad os (igen med lettere grov tilgang til arbejdet med operatorerne) betragte operatoren $e^{2\pi i (pP + qQ)}$. For $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sættes $g(x, t) = (e^{2\pi i t (pP + qQ)} f)(x)$. Da er idéen, at g må løse operatordifferentialligningen $\partial g / \partial t = 2\pi i (pP + qQ) g$ med begyndelsesbetingelsen $g(x, 0) = f(x)$. Ved indsættelse af Q og P giver det

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = 2\pi i q x g.$$

Inspireret af at venstresiden her er den retningsafledede af g langs $(-p, 1)$ sættes nu $x(t) = x - tp$ og $G(t) = g(x(t), t)$, så

$$G'(t) = 2\pi iq(x - tp)g(x - tp, t) = 2\pi iq(x - tp)G(t)$$

og $G(0) = f(x)$. Løsningen til denne ligning med betingelsen $G(0) = f(x)$ ses at være

$$g(x - tp, t) = G(t) = f(x)e^{2\pi itqx - \pi it^2 pq}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ved at bruge ovenstående med $t = 1$ og med $x + p$ i stedet for x fås netop

$$e^{2\pi i(pP + qQ)}f(x) = g(x, 1) = e^{2\pi iq(x+p) - \pi ipq}f(x + p) = e^{2\pi iqx + \pi ipq}f(x + p),$$

og repræsentationen bliver i dette tilfælde

$$\rho(p, q, t)f(x) = e^{2\pi it + 2\pi iqx + \pi ipq}f(x + p),$$

som jo netop er Schrödingerrepræsentationen, (1.1), med $h = 1$.

I det ovenstående er det således (op til visse betingelser) illustreret, at vi givet en repræsentation (i fysisk forstand) af Weylrelationerne (og i et vist omfang de kanoniske kommutatorrelationer) via Stone–von Neumanns sætning kan slutte, at denne repræsentation er unitært ækvivalent til repræsentationen, hvor Q_i og P_j er givet ved (2.4) (og lad mig igen slå fast, at her ingenlunde er tale om et matematisk bevis). Mere konkret gælder følgende sætning fra [2], der skyldes Franz Rellich, Edward Nelson (og von Neumann):

Sætning 2.4. *Lad $P_1, \dots, P_n$, $Q_1, \dots, Q_n$ være lukkede symmetriske operatorer i et Hilbertrum $\mathcal{H}$ og lad D være et tæt underrum i $\mathcal{H}$, som er indeholdt i definitionsområderne for operatorerne P_jP_k, Q_jQ_k, Q_jP_k og P_jQ_k for $j, k = 1, \dots n$. Antag nu at $[P_j, P_k]x = [Q_j, Q_k]x = 0$ og $[P_j, Q_k]x = -i\delta_{jk}x$ for alle $x \in D$ og $j, k = 1, \dots, n$, og at operatoren $\sum_{k=1}^{n}(P_k^2 + Q_k^2)_{|D}$ er essentielt selvadjungeret. Da er operatorerne $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ alle selvadjungerede, og der eksisterer en familie $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ af lukkede parvis ortogonale underrum af $\mathcal{H}$ med følgende egenskaber:*

- *$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{H}_\alpha$, og $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ er tæt defineret på hvert $\mathcal{H}_\alpha$ og alle $\mathcal{H}_\alpha$ er invariante under alle $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$.*
- *For hvert α er systemet af operatorer $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n$ i $\mathcal{H}_\alpha$ unitært ækvivalent med Schrödingers repræsentation.*

Vi har undervejs betragtet kvantemekaniske systemer bestående af n partikler, men det er værd at bemærke tilfældet, der kendes som kvantefeltteorien, hvor vi tillader vilkårligt mange partikler og betragter kommutatorrelationerne for uendelige familier af operatorer. Generaliseringer til denne type situationer har været et aktivt forskningsområde i løbet af det sidste århundrede og er det også den dag i dag; lad mig afslutte opgaven med en henvisning til [2], som netop behandler dette tilfælde.

A Ubegrænsede operatorer

I det følgende introduceres nogle grundlæggende begreber i teorien om ubegrænsede operatorer sammen med udvalgte resultater, som har særlig betydning for kvantemekanikken og herunder anvendelsen af Stone–von Neumanns sætning i samme, som den er beskrevet i Kap. 2.

Definition A.1 (Lineær operator)**.** En *lineær operator i et Hilbertrum* $\mathcal{H}$ er et par $(A, \mathcal{D}_A)$, hvor $\mathcal{D}_A$ er et underrum af $\mathcal{H}$, og $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}$ er en lineær afbildning. Bemærk således den subtile skelnen mellem det velkendte begreb om operatorer *på* et Hilbertrum og her operatorer *i* et Hilbertrum. Hvis der om to lineære operatorer i $\mathcal{H}$, $(A, \mathcal{D}_A), (B, \mathcal{D}_B)$, gælder, at $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_B$ og $A\varphi = B\varphi$ for $\varphi \in \mathcal{D}_A$ skrives ofte $A \subseteq B$. Desuden skrives ofte A om operatoren $(A, \mathcal{D}_A)$, hvis definitionsområdet fremgår af konteksten.

Som det fremgår af beskrivelsen af kvantemekanikken spiller de selvadjungerede operatorer en særligt vigtig rolle, men som nævnt volder definitionsområderne en smule problemer for en direkte oversættelse af det velkendte begreb om begrænsede selvadjungerede operatorer, og vi tvinges til at introducere begreberne pány: Hvor vi i det begrænsede tilfælde generelt kan tale om den adjungerede til en operator (se [6, Lem. 2.23]) må vi i det ubegrænsede tilfælde lægge en betingelse på operatorens definitionsområde. Helt præcist har vi følgende sætning, der medtages her uden bevis.

Sætning A.2. *Lad $(A, \mathcal{D}_A)$ være en operator i $\mathcal{H}$. Lad $\mathcal{D}_{A^*}$ betegne mængden af vektorer $\psi \in \mathcal{H}$ for hvilke der findes netop én vektor ψ^*, der opfylder*

$$\langle \psi^*, \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle$$

for alle $\varphi \in \mathcal{D}_A$. Operatoren $(A^*, \mathcal{D}_{A^*})$ givet ved $A^*\psi = \psi^*$ er en lineær operator i $\mathcal{H}$, som kaldes den adjungerede *af A, og den findes (dvs. $\mathcal{D}_{A^*} \neq \emptyset$), hvis og kun hvis $\mathcal{D}_A$ er tæt i $\mathcal{H}$.*

Definition A.3 (Symmetrisk og selvadjungeret operator)**.** Lad $(A, \mathcal{D}_A)$ være en lineær operator i et Hilbertrum og $(A^*, \mathcal{D}_{A^*})$ den adjungerede af A. Hvis $A \subseteq A^*$ kaldes A *symmetrisk*, og hvis desuden $A^* \subseteq A$, så $A^* = A$, kaldes A selvadjungeret. Dette begreb bemærkes at stemme overens med det velkendte for begrænsede operatorer, og de selvadjungerede begrænsede operatorer er netop de symmetriske. En operator kaldes essentielt selvadjungeret, hvis der eksisterer en entydig selvadjungeret udvidelse af operatoren.

Definition A.4 (Graf for en operator og lukkethed)**.** *Grafen*, $\mathcal{G}_A$, for en operator A i et Hilbertrum er mængden $\mathcal{G}_A = \{(\psi, A\psi) \mid \psi \in \mathcal{D}_A\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Operatoren A kaldes *lukket*, når $\mathcal{G}_A$ er lukket i produkttopologien.

Lad os for illustrationens skyld betragte nedenstående lemma, der trods sin simplicitet er vigtig i kvantemekanikken og også benyttes i denne opgaves hovedtekst.

Lemma A.5. *Hvis A er en selvadjungeret operator i $\mathcal{H}$ og U er en unitær operator på $\mathcal{H}$ (i sædvanlig forstand; $UU^* = U^*U = I$), så er operatoren $B = UAU^{-1}$ med definitionsområde $\mathcal{D}_B = U\mathcal{D}_A$ selvadjungeret.*

Bevis. Da en tæt delmængde af et Hilbertrum forbliver tæt under unitær transformation, og da $\mathcal{D}_A$ er tæt i $\mathcal{H}$ fra Stn. A.2, er $\mathcal{D}_B$ også tæt i $\mathcal{H}$, og if. samme sætning eksisterer B^*. For $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_B$ har vi, da A er selvadjungeret, at

$$\begin{aligned}\langle \varphi, B\psi\rangle &= \langle \varphi, UA^*U^{-1}\psi\rangle = \langle U^{-1}\varphi, A^*U^{-1}\psi\rangle = \langle AU^{-1}\varphi, U^{-1}\psi\rangle \\ &= \langle UAU^{-1}\varphi, \psi\rangle = \langle B\varphi, \psi\rangle.\end{aligned}$$

Det følger, at $UA^*U^{-1} = B \subseteq B^*$. Idet U^{-1} er unitær kan vi ombytte A og B, hvorved vi opnår $U^{-1}B^*U \subseteq A^*$. Heraf fås $B^* \subseteq UA^*U^{-1} = B$, så $B = B^*$ som ønsket. □

Det er værd at bemærke følgende resultater om lineære operatorer, der er definerede på hele Hilbertrummet.

Sætning A.6. *Den adjungerede A^* af en lineær operator A med definitionsområde $\mathcal{D}_A = \mathcal{H}$ er en begrænset operator på $\mathcal{H}$.*

Idet en symmetrisk overaltdefineret operator nødvendigvis er lig sin adjungerede, giver ovenstående sætning øjeblikkeligt det følgende resultat, der udsiger, at observable hørende til ubegrænsede selvadjungerede operatorer umuligt kan defineres på hele det pågældende Hilbertrum.

Sætning A.7 (Hellinger og Toeplitz)**.** *En symmetrisk operator defineret på hele $\mathcal{H}$ er begrænset.*

Endelig postuleres et væsentligt resultat, der lader os udvide den velkendte funktionalcalculus af normale, begrænsede operatorer til generelle selvadjungerede operatorer. Vi har følgende resultat, der svarer til Stn. III.6.3 i [3]:

Sætning A.8. *Til en selvadjungeret operator A i et Hilbertrum findes en entydig opløsning af enheden E på $\mathbb{R}$, så $\mathcal{D}_A$ består af alle φ med*

$$\left\langle \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 dE(\lambda) \right) \varphi, \varphi \right\rangle < \infty,$$

og for $\varphi \in \mathcal{D}_A, \psi \in \mathcal{H}$ er

$$\langle \psi, A\varphi\rangle = \left\langle \psi, \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \right) \varphi \right\rangle.$$

At integrationen her er over $\mathbb{R}$ og ikke som sædvanlig blot spektret af A kan intuitivt retfærdiggøres af, at det kan vises, at spektret af en selvadjungeret operator i et Hilbertrum er reelt.

Litteratur

[1] Gerald B. Folland. *Harmonic analysis in phase space.* Princeton University Press, 1989.

[2] Niels Skovhus Petersen. On the canonical commutation relations. *Math. Scand. 32, p. 112–122*, 1973.

[3] Eduard Prugovečki. *Quantum Mechanics in Hilbert Space.* Academic Press, Inc., 1971.

[4] Jonathan Rosenberg. A Selective History of the Stone-von Neumann Theorem. 2003.

[5] Stephen J. Summers. On the Stone-von Neumann Uniqueness Theorem and Its Ramifications. Juli 1998.

[6] Klaus Thomsen. Notes for a course in advanced analysis. Januar 2008.

[7] Jørgen Vesterstrøm. Emner fra klassiske Banachrum og harmonisk analyse. Marts 2004.